EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI LINEARI/2: PROBLEMI EVOLUTIVI

ANTONIO IANNIZZOTTO

Sommario. Introduzione ai problemi evolutivi. Operatori monotoni su spazi di Hilbert. Approssimante di Yosida. Problemi evolutivi in spazi di Hilbert: esistenza e unicità nel caso continuo, Teorema di Hille-Yosida, il caso autoaggiunto, regolarità della soluzione. Equazioni paraboliche: esistenza e unicità della soluzione dell'equazione del calore con condizioni di Cauchy-Dirichlet, regolarità, risoluzione per decomposizione spettrale, principio del massimo. Equazioni iperboliche: esistenza e unicità per l'equazione delle onde con condizioni di Cauchy-Dirichlet, regolarità, risoluzione per decomposizione spettrale.

Indice

Versione del 22 giugno 2022

Il tempo dilegua ma non sparisce. Cresce in profondità.
E. Jünger

1. EDP lineari paraboliche e iperboliche

Le equazioni alle derivate parziali (EDP) del secondo ordine paraboliche e iperboliche, a differenza da quelle ellittiche studiate in [7], sono caratterizzate dalla presenza di una variabile indipendente rispetto alla quale la matrice dei coefficienti della forma quadratica del secondo ordine ha un autovalore nullo o negativo.

Richiamiamo da [7] il modello generale di EDP lineare del secondo ordine, denotando per comodità $N+1$ ($N \geqslant 1$) il numero delle variabili indipendenti:

$$-\sum_{i,j=1}^{N+1} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{h=1}^{N+1} b_h(x)\frac{\partial u}{\partial x_h} + c(x)u = f(x) \text{ in } \Omega, \tag{1.1}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ è un dominio e $a_{ij}, b_h, c, f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, e $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$ (altrimenti riformuliamo equivalentemente (1.1) con i coefficienti $\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$). Gli autovalori della matrice $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{N+1}$ (a meno di un riordinamento delle variabili e in dipendenza da $x \in \overline{\Omega}$) possono essere ordinati come segue:

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_{N+1}.$$

L'equazione (1.1) è detta

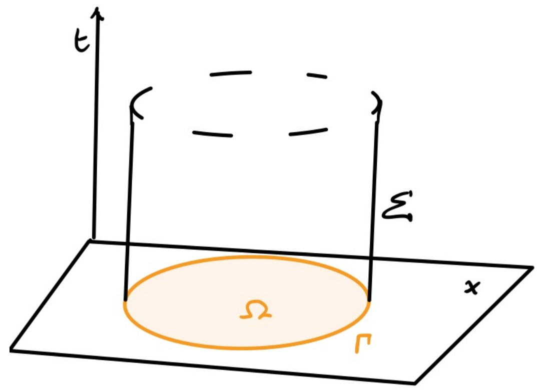

FIGURA 1.

(a) *parabolica* se $\mu_N > 0 = \mu_{N+1}$;
(b) *iperbolica* se $\mu_N > 0 > \mu_{N+1}$

(osserviamo che in entrambi i casi l'autovalore μ_{N+1} è semplice). Denotiamo allora $t = x_{N+1}$ ed 'estraiamo' questa variabile, alla quale viene attribuito il significato fisico di variabile temporale, mentre $x_1, \dots x_N$ rappresentano variabili spaziali: i fenomeni descritti da tali equazioni sono pertanto di tipo *evolutivo*. Per questo le EDP paraboliche e iperboliche sono usualmente ambientate in un dominio 'cilindrico' (fig. 1) $Q = \Omega \times \mathbb{R}_0^+$[1], dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato di frontiera $\Gamma = \partial\Omega$, e si pone $\Sigma = \Gamma \times \mathbb{R}^+$, così che

$$\partial Q = (\Omega \times \{0\}) \cup \Sigma.$$

La condizione al contorno sulla soluzione di una EDP evolutiva risulta quindi articolata in una condizione iniziale su $\Omega \times \{0\}$ (Cauchy) e in una condizione su Σ (Dirichlet, Neumann).

La più semplice equazione del tipo (a) è ottenuta ponendo $a_{ii} = 1$ per ogni $i \in \{1, \dots N\}$, $a_{N+1,N+1} = 0$, $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq 0$, $b_h = 0$ per ogni $1 \leqslant h \leqslant N$, $b_{N+1} = 1$, e $c = f = 0$. Si tratta dell'*equazione del calore*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \text{ in } Q,$$

che descrive l'evoluzione della temperatura di un corpo (a questa equazione è dedicata la Sezione 4). D'altra parte, la più semplice equazione del tipo (b) è ottenuta ponendo $a_{ii} = 1$ per ogni $i \in \{1, \dots N\}$, $a_{N+1,N+1} = -1$, $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq 0$, $b_h = 0$ per ogni $1 \leqslant h \leqslant N+1$, $c = f = 0$. Si tratta dell'*equazione delle onde*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \text{ in } Q,$$

che descrive la superficie di un liquido interessato da un moto ondoso (a questa equazione è dedicata la Sezione 5). Esporremo di seguito la teoria dell'esistenza, dell'unicità e della stabilità della soluzione di una EDP evolutiva (oltre ad alcuni cenni di teoria della regolarità). L'approccio che seguiremo consiste nel ricondurre le EDP dei tipi (a) e (b) a un'equazione differenziale ordinaria astratta del tipo

$$\frac{du}{dt} + A(u) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^+, \tag{1.2}$$

[1] Denotiamo $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ e $\mathbb{R}_0^+ = (0, \infty)$.

dove X è uno spazio di Hilbert e $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare (discontinuo). Per approfondimenti rimandiamo a [1, Chapters 7, 10], ai testi [3, 4, 8, 9] sulle EDP evolutive, e a [2] per le equazioni differenziali in spazi astratti.

Preliminarmente, richiamiamo alcune nozioni. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $u : I \to X$ una mappa (funzione): diremo che u è *derivabile* in $t \in I$ se esiste il limite

$$\frac{du}{dt}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}.$$

Diremo che $u \in C^1(I, X)$ se u è derivabile in ogni $t \in I$ e $\frac{du}{dt} \in C(I, X)$. Si ha inoltre la seguente formula:

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = 2\Big\langle \frac{du}{dt}(t), u(t)\Big\rangle. \tag{1.3}$$

Diremo che $U : I \to X$ è una *primitiva* di u se per ogni $t \in I$ si ha

$$\frac{dU}{dt}(t) = u(t).$$

In tal caso, per ogni $a, b \in I$ poniamo

$$\int_a^b u(t)\,dt = U(b) - U(a).$$

La presente definizione di integrale ha tutte le proprietà fondamentali dell'integrale di Riemann, per esempio si ha

$$\Big\| \int_a^b u(t)\,dt \Big\| \leqslant \int_a^b \|u(t)\|\,dt.$$

Introduciamo anche una nozione di *integrabilità* in spazi di Hilbert: diremo che $u \in L^2(I, X)$ se

$$\int_I \|u(t)\|^2\,dt < \infty.$$

Per ogni $F : X \to X$, $u_0 \in X$ introduciamo il *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = F(u) & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Una *soluzione* del problema (1.4) è una mappa $u \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ t.c. $u(0) = u_0$ e per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$\frac{du}{dt}(t) = F(u(t)).$$

Il seguente risultato estende il classico teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy in $\mathbb{R}^N$:

Teorema 1.1. (Cauchy-Lipschitz-Picard) *Siano $F : X \to X$ una funzione lipschitziana, $u_0 \in X$. Allora esiste un'unica soluzione $u \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ di* (1.4).

Dimostrazione. Per ipotesi, esiste $L > 0$ t.c. per ogni $x, y \in X$

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant L\|x - y\|. \tag{1.5}$$

Riformuliamo il problema (1.4) mediante un'*equazione integrale* ad esso equivalente:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(\tau))\,d\tau \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.6}$$

Infatti, sia u una soluzione di (1.4). Allora u è una primitiva di $F(u)$, da cui per ogni $t > 0$

$$u(t) - u(0) = \int_0^t F(u(\tau))\,d\tau.$$

Inoltre $u(0) = u_0$, quindi u risolve (1.6). Viceversa, sia u una soluzione di (1.6). Allora, per $t = 0$ si ha $u(0) = u_0$. Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ e $h > 0$ esiste $\tau_h \in [t, t+h]$ t.c.

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} F(u(\tau))\, d\tau = F(u(\tau_h)).$$

Passando al limite per $h \to 0$, vediamo che u risolve (1.4).

Dimostriamo ora che (1.6) ha una soluzione. Fissiamo $\alpha > L$ e poniamo

$$S = \Big\{ u \in C(\mathbb{R}^+, X) : \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{\|u(t)\|}{e^{\alpha t}} < \infty \Big\},$$

e per ogni $u, v \in S$

$$d_S(u, v) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{\|u(t) - v(t)\|}{e^{\alpha t}}.$$

Si vede facilmente che (S, d_S) è uno spazio metrico. Proviamo inoltre che S è completo. Sia (u_n) una successione di Cauchy in S, ovvero per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n, m \geqslant \nu$ si ha

$$d_S(u_n, u_m) < \varepsilon.$$

Allora, per ogni $T > 0$ si ha

$$\max_{t \in [0,T]} \|u_n(t) - u_m(t)\| < \varepsilon e^{\alpha T},$$

ovvero (u_n) è una successione di Cauchy anche in $C([0,T], X)$. Poiché $C([0,T], X)$ è uno spazio metrico completo, esiste $u \in C([0,T], X)$ t.c. $u_n \to u$. Per arbitrarietà di T, abbiamo $u_n(t) \to u(t)$ in X per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, uniformemente su ogni intervallo compatto. Ne segue che $u \in C(\mathbb{R}^+, X)$. Infine osserviamo che esiste $C > 0$ (indipendente da n) t.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$\frac{\|u_n(t)\|}{e^{\alpha t}} \leqslant C.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ abbiamo

$$\frac{\|u(t)\|}{e^{\alpha t}} \leqslant C,$$

ovvero $u \in S$. Ora proviamo che $u_n \to u$ in S. Ragionando per assurdo, supponiamo che esista $\delta > 0$ t.c. (a meno di sottosuccessioni) si abbia per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$d_S(u_n, u) > \delta.$$

Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $t_n \in \mathbb{R}^+$ t.c.

$$\|u_n(t_n) - u(t_n)\| > \delta e^{\alpha t_n}.$$

Per la condizione di Cauchy, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n > m \geqslant \nu$

$$d_S(u_n, u_m) < \frac{\delta}{2}.$$

Fissiamo m e facciamo variare $n \in \mathbb{N}$. Poiché $u_n \to u$ uniformemente in $[0, t_m]$, per ogni $n > m$ abbastanza grande si ha

$$\max_{t \in [0, t_m]} \|u_n(t) - u(t)\| < \frac{\delta}{2}.$$

Dalle relazioni precedenti abbiamo

$$\begin{aligned} \delta e^{\alpha t_m} &< \|u_m(t_m) - u(t_m)\| \\ &\leqslant \|u_m(t_m) - u_n(t_m)\| + \|u_n(t_m) - u(t_m)\| \\ &\leqslant \frac{\delta}{2} e^{\alpha t_m} + \frac{\delta}{2} \leqslant \delta e^{\alpha t_m}, \end{aligned}$$

assurdo. Dunque $u_n \to u$ in S.
Definiamo ora una funzione $\Phi : S \to S$. Poniamo per ogni $u \in S$, $t \in \mathbb{R}^+$

$$\Phi(u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(\tau))\, d\tau.$$

Proviamo innanzitutto che $\Phi(u) \in S$. Chiaramente si ha $\Phi(u) \in C(\mathbb{R}^+, X)$. Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ abbiamo per (1.5)

$$\|F(u(t))\| \leqslant \|F(u(0))\| + L\|u(t) - u(0)\| \leqslant C + L\|u(t)\|,$$

con $C > 0$ indipendente da t. Pertanto abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{\|\Phi(u)(t)\|}{e^{\alpha t}} &\leqslant \frac{\|u_0\|}{e^{\alpha t}} + \int_0^t \frac{\|F(u(\tau))\|}{e^{\alpha t}}\, d\tau \\
&\leqslant \frac{\|u_0\|}{e^{\alpha t}} + \int_0^t \frac{C + L\|u(\tau)\|}{e^{\alpha t}}\, d\tau \\
&\leqslant \frac{\|u_0\|}{e^{\alpha t}} + \frac{Ct}{e^{\alpha t}} + C\int_0^t e^{\alpha(\tau - t)}\, d\tau \\
&\leqslant \frac{\|u_0\|}{e^{\alpha t}} + \frac{Ct}{e^{\alpha t}} + C\left[\frac{e^{\alpha(\tau - t)}}{\alpha}\right]_0^t \\
&\leqslant \frac{\|u_0\|}{e^{\alpha t}} + \frac{Ct}{e^{\alpha t}} + C\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \leqslant C.
\end{aligned}$$

Usando ancora (1.5), per ogni $u, v \in S$ abbiamo

$$\begin{aligned}
d_S(\Phi(u), \Phi(v)) &= \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|}{e^{\alpha t}} \\
&\leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_0^t \frac{\|F(u(\tau)) - F(v(\tau))\|}{e^{\alpha t}}\, d\tau \\
&\leqslant L \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_0^t \frac{\|u(\tau) - v(\tau)\|}{e^{\alpha t}}\, d\tau \\
&\leqslant L d_S(u, v) \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_0^t e^{\alpha(\tau - t)}\, d\tau \\
&= L d_S(u, v) \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} = \frac{L}{\alpha} d_S(u, v),
\end{aligned}$$

con $L/\alpha < 1$. Dunque $\Phi : S \to S$ è una contrazione. Per il Teorema di Banach-Caccioppoli [1, Theorem 5.7] esiste un'unica $u \in S$ t.c. $u = \Phi(u)$, ovvero per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(\tau))\, d\tau.$$

Così abbiamo provato che $u \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ risolve (1.6), o equivalentemente (1.4).
Rimane da dimostrare l'unicità della soluzione: siano $u, v \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ soluzioni di (1.4). Poniamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$g(t) = \|u(t) - v(t)\|.$$

Chiaramente $g \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, inoltre per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ si ha da (1.5) e (1.6)

$$\begin{aligned} g(t) &\leqslant \int_0^t \|F(u(\tau)) - F(v(\tau))\| \, d\tau \\ &\leqslant L \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\| \, d\tau = L \int_0^t g(\tau) \, d\tau. \end{aligned}$$

Per il Lemma di Gronwall abbiamo $g(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, ovvero $u = v$. Pertanto la soluzione di (1.4) è unica. □

Osservazione 1.2. Dalla dimostrazione del Teorema 1.1 si vede che la soluzione di (1.4) è unica *in generale*, non solo fra le funzioni $u \in S$.

Tuttavia, non possiamo applicare direttamente il Teorema 1.1 all'equazione (1.2), in quanto l'operatore A che ci interessa (il laplaciano) non è continuo. Dobbiamo pertanto approssimare (1.2) mediante una famiglia di problemi coinvolgenti operatori continui.

Esercizio 1.3. Dimostrare la formula (1.3).

Esercizio 1.4. Dimostrare che (S, d_S) è uno spazio metrico.

2. Il teorema di Hille-Yosida

In questa sezione studiamo un problema di Cauchy astratto in uno spazio di Hilbert X[2]:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

dove $A : D(A) \subseteq X \to X$ è un operatore lineare (non necessariamente continuo) e $u_0 \in X$ è il dato iniziale. La definizione di soluzione di (2.1) è analoga a quella introdotta per il problema (1.4)
In generale, il problema (2.1) non ha soluzione (si pensi, per esempio, al caso in cui $u_0 \notin D(A)$). Per studiarlo, occorre assumere che A sia 'approssimabile' mediante operatori lineari continui. Tale approssimazione è possibile sotto opportune ipotesi di monotonia, e per $u_0 \in D(A)$.

Definizione 2.1. *Un operatore lineare $A : D(A) \subseteq X \to X$ è detto*

(i) monotono se $\langle A(x), x \rangle \geqslant 0$ per ogni $x \in D(A)$;
(ii) massimale monotono se A è monotono e $\mathrm{im}(I + A) = X$.

La condizione *(ii)* implica che per ogni $y \in X$ l'equazione funzionale

$$x + A(x) = y \tag{2.2}$$

ha almeno una soluzione in $D(A)$. In effetti, tale soluzione è *unica*, e dipende da y con continuità. Vediamo alcune proprietà degli operatori massimali monotoni:

Lemma 2.2. *Sia A massimale monotono. Allora:*

(i) per ogni $\lambda > 0$, $I + \lambda A : D(A) \subseteq X \to X$ è biunivoco, t.c. $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, $\|J_\lambda\| \leqslant 1$;
(ii) $\overline{D(A)} = X$;
(iii) A è chiuso.

[2]Adotteremo sistematicamente l'identificazione $X = X^*$, conseguenza del Teorema di rappresentazione di Riesz (ved. [5]). Inoltre, denoteremo $\|\cdot\|$ le norme di X, X^* e $\mathcal{L}(X)$.

Dimostrazione. Proviamo (*i*). Poniamo dapprima $\lambda = 1$. Per ogni $y \in X$, l'equazione (2.2) ha soluzione unica. Infatti, se $x_1, x_2 \in D(A)$ sono soluzioni di (2.2), allora si ha per la Definizione 2.1

$$0 = \langle (x_1 - x_2) + A(x_1 - x_2), x_1 - x_2 \rangle \geqslant \|x_1 - x_2\|^2,$$

da cui $x_1 = x_2$. Pertanto, è ben definito in X l'operatore lineare $J_1 = (I + A)^{-1}$. Inoltre, $J_1 \in \mathcal{L}(X)$ con $\|J_1\| \leqslant 1$. Infatti, per ogni $y \in X$, detta $x \in D(A)$ la soluzione di (2.2), si ha

$$\|y\|\|x\| \geqslant \langle y, x \rangle = \|x\|^2 + \langle A(x), x \rangle \geqslant \|x\|^2,$$

da cui $\|J_1(y)\| \leqslant \|y\|$. Fissiamo ora $\lambda > \frac{1}{2}$, $y \in X$, e consideriamo l'equazione

$$x + \lambda A(x) = y. \tag{2.3}$$

Poniamo per ogni $x \in X$

$$S(x) = J_1\Big(\frac{1}{\lambda}y + \frac{\lambda - 1}{\lambda}x\Big).$$

La funzione $S : X \to X$ è una contrazione. Infatti, per ogni $x_1, x_2 \in X$, dal Lemma 2.2 (*i*) segue

$$\begin{aligned}\|S(x_1) - S(x_2)\| &\leqslant \Big\|\Big(\frac{1}{\lambda}y + \frac{1-\lambda}{\lambda}x_1\Big) - \Big(\frac{1}{\lambda}y + \frac{1-\lambda}{\lambda}x_2\Big)\Big\| \\ &\leqslant \Big|\frac{\lambda - 1}{\lambda}\Big|\|x_1 - x_2\|,\end{aligned}$$

con

$$\Big|\frac{\lambda - 1}{\lambda}\Big| < 1.$$

Per il Teorema di Banach-Caccioppoli [1, Theorem 5.7], esiste un unico $x \in X$ t.c. $S(x) = x$, ovvero

$$x + A(x) = \frac{1}{\lambda}y + \frac{\lambda - 1}{\lambda}x.$$

Ne segue che x è l'unica soluzione di (2.3), ovvero l'operatore $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ è ben definito. Come sopra si prova che $J_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ con $\|J_\lambda\| \leqslant 1$. Così continuando, per ogni $n \in \mathbb{N}$ dimostriamo (*i*) per ogni $\lambda > \frac{1}{2^n}$, e quindi per ogni $\lambda > 0$.

Proviamo (*ii*). Sia $y \in D(A)^\perp$. Come visto sopra, esiste un'unica soluzione $x \in D(A)$ di (2.2), da cui

$$0 = \langle x, y \rangle = \|x\|^2 + \langle A(x), x \rangle \geqslant \|x\|^2.$$

Ne segue $x = 0$, che implica $y = 0$. Pertanto $D(A)$ è denso in X.

Proviamo infine (*iii*), ovvero che $\mathrm{gr}(A)$ è chiuso in $X \times X$. Sia (x_n) una successione in $D(A)$ t.c. $x_n \to x$, $A(x_n) \to y$ in X. Allora $x_n + A(x_n) \to x + y$, da cui per continuità di $(I + A)^{-1}$

$$x = \lim_n x_n = \lim_n (I + A)^{-1}(x_n + A(x_n)) = (I + A)^{-1}(x + y).$$

Ne segue che $x \in D(A)$ e $A(x) = y$. $\square$

Il Lemma 2.2 suggerisce la seguente definizione:

Definizione 2.3. *Siano A massimale monotono, $\lambda > 0$:*

(*i*) *il risolvente di A è l'operatore $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$;*

(*ii*) *l'approssimante (di Yosida) di A è l'operatore*

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda) \in \mathcal{L}(X).$$

La famiglia di operatori continui $(A_\lambda)_{\lambda > 0}$ approssima l'operatore A (generalmente discontinuo) per $\lambda \to 0^+$:

Lemma 2.4. *Siano A massimale monotono, $\lambda > 0$. Allora:*

(*i*) *$A_\lambda(x) = A(J_\lambda(x))$ per ogni $x \in X$;*

(*ii*) $A_\lambda(x) = J_\lambda(A(x))$ *per ogni* $x \in D(A)$*;*
(*iii*) $\|A_\lambda(x)\| \leqslant \|A(x)\|$ *per ogni* $x \in D(A)$*;*
(*iv*) $\lim\limits_{\lambda\to 0} J_\lambda(x) = x$ *per ogni* $x \in X$*;*
(*v*) $\lim\limits_{\lambda\to 0} A_\lambda(x) = A(x)$ *per ogni* $x \in D(A)$*;*
(*vi*) $\langle A_\lambda(x), x\rangle \geqslant 0$ *per ogni* $x \in X$*;*
(*vii*) $\|A_\lambda(x)\| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}\|x\|$ *per ogni* $x \in X$*.*

Dimostrazione. Proviamo (*i*). Per definizione di J_λ, si ha per ogni $x \in X$

$$x = (I + \lambda A)(J_\lambda(x)) = J_\lambda(x) + \lambda A(J_\lambda(x)),$$

da cui

$$A(J_\lambda(x)) = \frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda(x)) = A_\lambda(x).$$

Proviamo (*ii*). Per ogni $x \in D(A)$, sommando $A(x)$ a (*i*) si ha

$$A_\lambda(x) = A(x) - A(x - J_\lambda(x)) = A(x) - \lambda A(A_\lambda(x)),$$

ovvero

$$(I + \lambda A)(A_\lambda(x)) = A(x),$$

da cui (*ii*).
Proviamo (*iii*). Dal Lemma 2.2 (*i*) e da (*ii*), si ha per ogni $x \in D(A)$

$$\|A_\lambda(x)\| \leqslant \|J_\lambda\|\|A(x)\| \leqslant \|A(x)\|.$$

Proviamo (*iv*). Osserviamo dapprima che per ogni $y \in D(A)$ si ha per (*iii*)

$$\|y - J_\lambda(y)\| = \lambda\|A_\lambda(y)\| \leqslant \lambda\|A(y)\|,$$

e quest'ultimo tende a 0 per $\lambda \to 0$. Fissati $x \in X$, $\varepsilon > 0$, per il Lemma 2.2 (*ii*) esiste $y \in D(A)$ t.c. $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3}$, e per quanto sopra si ha per ogni $\lambda > 0$ abbastanza piccolo $\|y - J_\lambda(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$, da cui (ricordando che $\|J_\lambda\| \leqslant 1$)

$$\begin{aligned}\|x - J_\lambda(x)\| &\leqslant \|x - y\| + \|y - J_\lambda(y)\| + \|J_\lambda(y) - J_\lambda(x)\| \\ &\leqslant 2\|x - y\| + \|y - J_\lambda(y)\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Proviamo (*v*). Da (*ii*) segue per ogni $x \in D(A)$

$$\|A_\lambda(x) - A(x)\| = \|J_\lambda(A(x)) - A(x)\|,$$

e per (*iv*) questo tende a 0 per $\lambda \to 0$.
Proviamo (*vi*) e (*vii*). Per ogni $x \in X$, si ha dalla definizione di A_λ e da (*i*)

$$\begin{aligned}\langle A_\lambda(x), x\rangle &= \langle A_\lambda(x), x - J_\lambda(x)\rangle + \langle A_\lambda(x), J_\lambda(x)\rangle \\ &= \lambda\langle A_\lambda(x), A_\lambda(x)\rangle + \langle A(J_\lambda(x)), J_\lambda(x)\rangle \geqslant \lambda\|A_\lambda(x)\|^2.\end{aligned}$$

Da questa diseguaglianza segue subito (*vi*). Infine, per la Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$\|A_\lambda(x)\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda}\|A_\lambda(x)\|\|x\|,$$

da cui (*vii*). Così la dimostrazione è conclusa. □

Osservazione 2.5. L'approssimazione $A_\lambda(x) \to A(x)$ del Lemma 2.4 (*v*) è *puntuale*. In generale non si ha $A_\lambda \to A$ in $\mathcal{L}(X)$, in quanto A non è continuo, anzi si può avere $\|A_\lambda\| \to \infty$ (ved. (*vii*)). Notiamo anche che gli operatori A e J_λ commutano su $D(A)$ per (*i*) e (*ii*).

Introduciamo ora un problema approssimante per (2.1), dipendente da un parametro $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda(u_\lambda) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^+ \\ u_\lambda(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

dove $A : D(A) \subseteq X \to X$ è massimale monotono, $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ è dato dalla Definizione 2.3, e il dato iniziale è $u_0 \in D(A)$. La soluzione di (2.4) è definita come nei casi precedenti. Il nostro programma si articola in quattro passi:

(1) dimostrare che per ogni $\lambda > 0$ il problema (2.4) ha soluzione unica u_λ, soddisfacente alcune utili *stime a priori*;
(2) dimostrare che $u_\lambda \to u$ per $\lambda \to 0$, puntualmente in $\mathbb{R}^+$ e uniformemente negli intervalli $[0, T]$ $(T > 0)$;
(3) dimostrare, sotto l'ipotesi aggiuntiva $u_0 \in D(A^2)$[3], che si ha anche $\frac{du_\lambda}{dt} \to \frac{du}{dt}$, puntualmente in $\mathbb{R}^+$ e uniformemente in $[0, T]$ $(T > 0)$, così che u risolve (2.1);
(4) dimostrare infine che per ogni $u_0 \in D(A)$ il problema (2.1) ha soluzione unica.

Cominciamo dunque con un risultato di esistenza e unicità per il problema (2.4):

Proposizione 2.6. *Siano A massimale monotono, $u_0 \in D(A)$. Allora, per ogni $\lambda > 0$ il problema (2.4) ha un'unica soluzione $u_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$. Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ si ha*

(i) $\|u_\lambda(t)\| \leqslant \|u_0\|$;
(ii) $\left\|\dfrac{du_\lambda}{dt}(t)\right\| = \|A_\lambda(u_\lambda(t))\| \leqslant \|A(u_0)\|$.

Dimostrazione. Per ogni $x, y \in X$ si ha

$$\|A_\lambda(x) - A_\lambda(y)\| \leqslant \|A_\lambda\| \|x - y\|.$$

Dunque la funzione $F : X \to X$ definita da $F(x) = -A_\lambda(x)$ è lipschitziana. Dal Teorema 1.1 segue l'esistenza di un'unica mappa $u_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$, soluzione di (2.4).

Proviamo *(i)*. Per (1.3) e il Lemma 2.4 *(vi)*, abbiamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)\|^2 &= 2\Big\langle \frac{du_\lambda}{dt}(t), u_\lambda(t) \Big\rangle \\ &= -2\langle A_\lambda(u_\lambda(t)), u_\lambda(t)\rangle \leqslant 0. \end{aligned}$$

Dunque la funzione $t \mapsto \|u_\lambda(t)\|^2$ è non-crescente, in particolare si ha per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\|u_\lambda(t)\|^2 \leqslant \|u_\lambda(0)\|^2 = \|u_0\|^2,$$

da cui *(i)*. Osserviamo che *fino a questo punto non abbiamo usato l'ipotesi* $u_0 \in D(A)$.

Proviamo infine *(ii)*. Poniamo

$$v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt} \in C(\mathbb{R}^+, X), \;\; v_0 = \frac{du_\lambda}{dt}(0).$$

Da (2.4) si ha per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \frac{dv_\lambda}{dt}(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big[\frac{du_\lambda}{dt}(t+h) - \frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big] \\ &= -\lim_{h \to 0} \frac{A_\lambda(u_\lambda(t+h)) - A_\lambda(u_\lambda(t))}{h} \\ &= -A_\lambda\Big[\lim_{h \to 0} \frac{u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)}{h}\Big] = -A_\lambda(v_\lambda(t)). \end{aligned}$$

[3]Ovvero $u_0, A(u_0) \in D(A)$.

Inoltre, chiaramente si ha $v_\lambda(0) = v_0$, ovvero v_λ è soluzione del seguente problema di Cauchy, analogo a (2.4):

$$\begin{cases} \dfrac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda(v_\lambda) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ v_\lambda(0) = v_0. \end{cases}$$

Come sopra, si ricava dunque $v_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\|v_\lambda(t)\| \leqslant \|v_0\| = \|A_\lambda(u_0)\|.$$

Poiché $u_0 \in D(A)$, dal Lemma 2.4 *(iii)* segue $\|A_\lambda(u_0)\| \leqslant \|A(u_0)\|$, da cui *(ii)*. □

Nei prossimi risultati, vedremo come la soluzione u_λ di (2.4) approssima quella di (2.1), per $\lambda \to 0$. A tale fine, introduciamo le seguenti notazioni per la convergenza uniforme:

(a) diremo che $u_\lambda \to u$ in $C(I, X)$ per $\lambda \to 0$, se

$$\lim_{\lambda \to 0} \max_{t \in I} \|u_\lambda(t) - u(t)\| = 0;$$

(b) diremo che $u_\lambda \to u$ in $C_{\rm loc}(I, X)$ per $\lambda \to 0$, se per ogni $J \subset I$ compatto si ha $u_\lambda \to u$ in $C(J, X)$.

Ovviamente (a) implica (b), mentre l'implicazione inversa vale solo se I è compatto. Sotto l'ipotesi (b) si ha in particolare per ogni $t \in I$ la convergenza puntuale

$$\lim_{\lambda \to 0} u_\lambda(t) = u(t).$$

Cominciamo con la convergenza di u_λ:

Lemma 2.7. (Approssimazione di ordine 0) *Siano A massimale monotono, $u_0 \in D(A)$, u_λ la soluzione di (2.4). Allora esiste $u \in C(\mathbb{R}^+, X)$ t.c. $u_\lambda \to u$ in $C_{\rm loc}(\mathbb{R}^+, X)$ per $\lambda \to 0^+$.*

Dimostrazione. Proviamo dapprima che per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ e $\lambda, \mu > 0$.

$$\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leqslant 2(\lambda + \mu)\|A(u_0)\|^2. \tag{2.5}$$

Infatti, usando (1.3), (2.4), Definizione 2.3, Lemma 2.4 *(i)*, monotonia di A, e Proposizione 2.6 *(ii)*, otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 &= \Big\langle \frac{du_\lambda}{dt}(t) - \frac{du_\mu}{dt}(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\Big\rangle \\
&= -\langle A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\rangle \\
&= -\langle A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)), u_\lambda(t) - J_\lambda(u_\lambda(t))\rangle \\
&\quad - \langle A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)), J_\lambda(u_\lambda(t)) - J_\mu(u_\mu(t))\rangle \\
&\quad - \langle A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)), J_\mu(u_\mu(t)) - u_\mu(t)\rangle \\
&= -\langle A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)), \lambda A_\lambda(u_\lambda(t))\rangle \\
&\quad - \langle A(J_\lambda(u_\lambda(t) - J_\mu(u_\mu(t))), J_\lambda(u_\lambda(t) - J_\mu(u_\mu(t))\rangle \\
&\quad + \langle A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)), \lambda A_\mu(u_\mu(t))\rangle \\
&\leqslant -\langle A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)), \lambda A_\lambda(u_\lambda(t)) - \mu A_\mu(u_\mu(t))\rangle \\
&= -\lambda\|A_\lambda(u_\lambda(t))\|^2 + (\lambda + \mu)\|A_\lambda(u_\lambda(t))\|\|A_\mu(u_\mu(t))\| - \mu\|A_\mu(u_\mu(t))\|^2 \\
&\leqslant (\lambda + \mu)\|A(u_0)\|^2.
\end{aligned}$$

Integrando (2.5) su $[0, t]$ abbiamo

$$\begin{aligned}\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 &= \int_0^t \frac{d}{d\tau}\|u_\lambda(\tau) - u_\mu(\tau)\|^2 \, d\tau \\ &\leqslant \int_0^t 2(\lambda+\mu)\|A(u_0)\|^2 \, d\tau = 2(\lambda+\mu)\|A(u_0)\|^2 t,\end{aligned}$$

da cui

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leqslant \|A(u_0)\|\sqrt{2(\lambda+\mu)t}.$$

Ora fissiamo $T > 0$ e proviamo che (u_λ) soddisfa la condizione di Cauchy in $C([0, T], X)$ per $\lambda \to 0^+$. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu > 0$ t.c. per ogni $\lambda, \mu \in (0, \nu)$ e ogni $t \in [0, T]$ si ha

$$\|A(u_0)\|\sqrt{2(\lambda+\mu)t} < \varepsilon,$$

da cui per la diseguaglianza precedente

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| < \varepsilon.$$

Ricordiamo che $C([0, T], X)$ è uno spazio completo, dunque esiste $u \in C([0, T], X)$ t.c. $u_\lambda \to u$ in $C([0, T], X)$ per $\lambda \to 0^+$. Osserviamo infine che per ogni $J \subset \mathbb{R}^+$ compatto esiste $T > 0$ t.c. $J \subseteq [0, T]$, da cui $u_\lambda \to u$ in $C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, X)$[4]. □

Proseguiamo dimostrando che u è derivabile, risolve (2.1), e $\frac{du_\lambda}{dt}$ approssima $\frac{du}{dt}$. Questo passo richiede, provvisoriamente, l'ipotesi aggiuntiva che $u_0 \in D(A^2)$:

Lemma 2.8. (Approssimazione di ordine 1) *Siano A massimale monotono, $u_0 \in D(A^2)$, u_λ la soluzione di (2.4), u come nel Lemma 2.7. Allora $u \in C^1(\mathbb{R}^+, X) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A))$ è soluzione di (2.1) e si ha*

$$\frac{du_\lambda}{dt} \to \frac{du}{dt}$$

in $C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, X)$ per $\lambda \to 0^+$. Inoltre per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

(*i*) $\|u(t)\| \leqslant \|u_0\|$;

(*ii*) $\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| = \|A(u(t))\| \leqslant \|A(u_0)\|$.

Dimostrazione. Come nella Proposizione 2.6, poniamo

$$v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}, \ v_0 = -A_\lambda(u_0),$$

e osserviamo che v_λ risolve

$$\begin{cases} \dfrac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda(v_\lambda) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ v_\lambda(0) = v_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Per il Lemma 2.4 (*ii*) si ha

$$v_0 = -J_\lambda(A(u_0)) \in D(A).$$

Dunque possiamo applicare la Proposizione 2.6 (*ii*) al problema (2.6), ottenendo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\|A_\lambda(v_\lambda(t))\| \leqslant \|A(v_0)\| \leqslant \|A^2(J_\lambda(u_0)\| = \|J_\lambda(A^2(u_0))\| \leqslant \|A^2(u_0)\|,$$

dove abbiamo anche usato il Lemma 2.4 (*i*) e l'ipotesi $u_0 \in D(A^2)$. Ragionando come nel Lemma 2.7, abbiamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, $\lambda, \mu > 0$

$$\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\| \leqslant \|A^2(u_0)\|\sqrt{2(\lambda+\mu)t}.$$

[4] Nel seguito ometteremo questa osservazione.

Fissiamo ora $T > 0$. Dalla diseguaglianza precedente segue che (v_λ) soddisfa la condizione di Cauchy in $C([0,T],X)$ per $\lambda \to 0^+$. Dunque esiste $v \in C([0,T],X)$ t.c. $v_\lambda \to v$ in $C([0,T],X)$ per $\lambda \to 0^+$. Pertanto abbiamo $u \in C^1([0,T],X)$ e per ogni $t \in [0,T]$

$$\frac{du}{dt}(t) = v(t).$$

Per unicità del limite, si vede infine che $u \in C^1(\mathbb{R}^+,X)$ e che per per $\lambda \to 0^+$ abbiamo in $C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+,X)$

$$\frac{du_\lambda}{dt} \to \frac{du}{dt}.$$

Proviamo ora che per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{\lambda\to 0^+} J_\lambda(u_\lambda(t)) = u(t). \tag{2.7}$$

Infatti, per il Lemma 2.4 *(i)* si ha per ogni $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}\|J_\lambda(u_\lambda(t)) - u(t)\| &\leqslant \|J_\lambda(u_\lambda(t)) - J_\lambda(u(t))\| + \|J_\lambda(u(t)) - u(t)\| \\ &\leqslant \|u_\lambda(t) - u(t)\| + \|J_\lambda(u(t)) - u(t)\|,\end{aligned}$$

e quest'ultimo tende a 0 per $\lambda \to 0^+$ (Lemma 2.7, Lemma 2.4 *(iv)*), da cui (2.7). Per il Lemma 2.4 *(i)* si ha per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, $\lambda > 0$

$$(J_\lambda(u_\lambda(t)), A_\lambda(u_\lambda(t))) = (J_\lambda(u_\lambda(t)), A(J_\lambda(u_\lambda(t)))) \in \mathrm{gr}(A).$$

D'altra parte, per (2.6), (2.4) e la convergenza puntuale abbiamo

$$\lim_{\lambda\to 0}(J_\lambda(u_\lambda(t)), A_\lambda(u_\lambda(t))) = \lim_{\lambda\to 0}\Big(J_\lambda(u_\lambda(t)), -\frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big) = \Big(u(t), -\frac{du}{dt}(t)\Big).$$

Poiché $\mathrm{gr}(A)$ è chiuso (Lemma 2.2 *(iii)*), si ha $u(t) \in D(A)$ e

$$-\frac{du}{dt}(t) = A(u(t)).$$

Inoltre, dal Lemma 2.7 abbiamo ovviamente $u(0) = u_0$. Dunque $u \in C(\mathbb{R}^+, D(A))$ ed è soluzione di (2.1).

Proviamo infine le stime a priori. Per la Proposizione 2.6 *(i)* abbiamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, $\lambda > 0$

$$\|u_\lambda(t)\| \leqslant \|u_0\|.$$

Passando al limite per $\lambda \to 0^+$ otteniamo *(i)*. Similmente, passando al limite per $\lambda \to 0^+$ nella Proposizione 2.6 *(ii)* otteniamo *(ii)*. Così la dimostrazione è conclusa. □

Infine, rimuoviamo l'ipotesi tecnica $u_0 \in D(A^2)$ e dimostriamo l'unicità della soluzione di (2.1), completando così il risultato principale:

Teorema 2.9. (Hille-Yosida) *Siano A massimale monotono, $u_0 \in D(A)$. Allora esiste un'unica soluzione $u \in C^1(\mathbb{R}^+,X) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A))$ di (2.1), inoltre si ha per ogni $t \in \mathbb{R}^+$*

- *(i)* $\|u(t)\| \leqslant \|u_0\|$;
- *(ii)* $\Big\|\dfrac{du}{dt}(t)\Big\| = \|A(u(t))\| \leqslant \|A(u_0)\|$.

Dimostrazione. Per ogni $\lambda > 0$ poniamo

$$w_\lambda = J_\lambda(u_0).$$

Si ha allora $w_\lambda \in D(A)$, inoltre

$$w_\lambda + \lambda A(w_\lambda) = u_0,$$

da cui

$$A(w_\lambda) = \frac{u_0 - w_\lambda}{\lambda} \in D(A),$$

ovvero $w_\lambda \in D(A^2)$. Inoltre, per il Lemma 2.4 *(i)* *(iv)* *(v)* si ha

$$\lim_{\lambda \to 0^+} w_\lambda = \lim_{\lambda \to 0^+} J_\lambda(u_0) = u_0,$$

$$\lim_{\lambda \to 0^+} A(w_\lambda) = \lim_{\lambda \to 0^+} A_\lambda(u_0) = A(u_0).$$

In particolare, (w_λ), $(A(w_\lambda))$ soddisfano la condizione di Cauchy in X, per $\lambda \to 0^+$. Consideriamo il problema[5]

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A(u_\lambda) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ u_\lambda(0) = w_\lambda. \end{cases} \tag{2.8}$$

Per il Lemma 2.8, per ogni $\lambda > 0$ esiste una soluzione $u_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^+, X) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A))$ soluzione di (2.8), verificante per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\|u_\lambda(t)\| \leqslant \|w_\lambda\|, \ \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\| \leqslant \|A(w_\lambda)\|.$$

Poiché A è lineare, per ogni $\lambda, \mu > 0$ la mappa $u_\lambda - u_\mu$ risolve

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u_\lambda - u_\mu) + A(u_\lambda - u_\mu) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ u_\lambda(0) - u_\mu(0) = w_\lambda - w_\mu. \end{cases}$$

Ancora per il Lemma 2.8 abbiamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leqslant \|w_\lambda - w_\mu\|, \ \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) - \frac{du_\mu}{dt}(t) \right\| \leqslant \|A(w_\lambda) - A(w_\mu)\|.$$

Come visto sopra, (w_λ), $(A(w_\lambda))$ soddisfano la condizione di Cauchy in X, per $\lambda \to 0^+$. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ t.c. per ogni $\lambda, \mu \in (0, \nu)$ e ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leqslant \varepsilon, \ \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) - \frac{du_\mu}{dt}(t) \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Ragionando come nel Lemma 2.8, vediamo che esistono due mappe $u, v \in C(\mathbb{R}^+, X)$ t.c. per $\lambda \to 0^+$ si ha in $C_{\rm loc}(\mathbb{R}^+, X)$

$$u\lambda \to u, \ \frac{du_\lambda}{dt} \to v.$$

Pertanto abbiamo $u \in C^1(\mathbb{R}^+, X) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A))$ e $\frac{du}{dt} = v$. Inoltre, ricordando che A è chiuso (Lemma 2.2 *(iii)*), si ha per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{du}{dt}(t) + A(u(t)) = 0.$$

Infine, per (2.7) abbiamo

$$u_0 = \lim_{\lambda \to 0^+} w_\lambda,$$

da cui $u(0) = u_0$. In conclusione u risolve (2.1). Infine, passando al limite per $\lambda \to 0^+$ nelle stime su u_λ e $\frac{du_\lambda}{dt}$, otteniamo *(i)* *(ii)*.

[5]Attenzione: nel problema (2.8) compare l'operatore A, non A_λ!

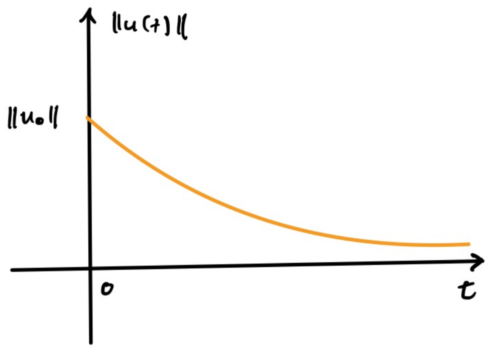

FIGURA 2.

Rimane da dimostrare che la soluzione di (2.1) è unica. Siano $u, \tilde{u} \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ soluzioni di (2.1) (con lo stesso dato iniziale u_0). Allora si ha

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u-\tilde{u}) + A(u-\tilde{u}) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ u(0) - \tilde{u}(0) = 0. \end{cases}$$

Per (i) abbiamo la seguente stima a priori per ogni $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leqslant 0,$$

da cui $u = \tilde{u}$. Così la dimostrazione è conclusa. □

Osservazione 2.10. Le stime a priori (i) (ii) garantiscono che sia la soluzione, sia la sua derivata sono limitate in $\mathbb{R}^+$ (fig. 2).

Osservazione 2.11. Mediante un procedimento iterativo, si dimostra per la soluzione u di (2.1) una maggiore regolarità: precisamente, per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ vale l'implicazione[6]

$$u_0 \in D(A^k) \implies u \in C^{k-i}(\mathbb{R}^+, D(A^i)), \ i = 0, \dots k.$$

Per $k = 1$, l'enunciato corrisponde al Teorema 2.9. Per $k \geqslant 2$, ved. [1, p. 191].

Esercizio 2.12. Dimostrare l'Osservazione 2.11 per $k = 2$.

Esercizio 2.13. Dimostrare che se $A \in \mathcal{L}(X)$, allora si ha $u \in C^\infty(\mathbb{R}^+, X)$.

3. Il caso autoaggiunto

Richiamiamo da [5] alcune nozioni. Siano X uno spazio di Hilbert, $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare (generalmente discontinuo). L'operatore aggiunto $A^* : D(A^*) \subseteq X \to X$ è definito ponendo

$$D(A^*) = \big\{y \in X : \text{esiste } C > 0 \text{ t.c. } \langle y, A(x)\rangle \leqslant C\|x\| \text{ per ogni } x \in D(A)\big\},$$

e per ogni $x \in D(A)$, $y \in D(A^*)$

$$\langle A^*(y), x\rangle = \langle A(x), y\rangle.$$

L'operatore A è detto *autoaggiunto* se $D(A) = D(A^*)$ e $A = A^*$, in generale. Tuttavia, per un operatore massimale monotono la definizione si semplifica notevolmente, riducendosi alla seguente identità, verificata per ogni $x, y \in D(A)$:

$$\langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle. \tag{3.1}$$

[6] Poniamo $D(A^0) = X$.

Si ha infatti:

Lemma 3.1. *Sia A un operatore massimale monotono verificante* (3.1). *Allora A è autoaggiunto.*

Dimostrazione. Poniamo $J_1 = (I + A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ come nella Definizione 2.3 (i). Dimostriamo che per ogni $x, y \in X$

$$\langle J_1(x), y\rangle = \langle x, J_1(y)\rangle. \tag{3.2}$$

Infatti, posto $x_1 = J_1(x)$, $y_1 = J_1(y)$, applicando (3.1) otteniamo

$$\begin{aligned}\langle x_1, y\rangle &= \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_1, A(y_1)\rangle \\ &= \langle x_1, y_1\rangle + \langle A(x_1), y_1\rangle = \langle x, y_1\rangle,\end{aligned}$$

da cui (3.2).

Torniamo adesso all'operatore A. Dalla definizione sopra si vede immediatamente che $D(A) \subseteq D(A^*)$. Proviamo ora l'inclusione inversa. Sia $y \in D(A^*)$. Posto $w = y + A^*(y)$, per (3.1) si ha per ogni $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}\langle w, x\rangle &= \langle y, x\rangle + \langle A^*(y), x\rangle \\ &= \langle y, x\rangle + \langle y, A(x)\rangle = \langle y, x + A(x)\rangle.\end{aligned}$$

Ne segue che $y = J_1(w)$. Infatti, per ogni $z \in X$, da (3.2) abbiamo

$$\langle J_1(w), z\rangle = \langle w, J_1(z)\rangle = \langle y, (I + A)(J_1(z))\rangle = \langle y, z\rangle.$$

Pertanto $y \in D(A)$. Dunque $D(A) = D(A^*)$. Ricordando (3.1), abbiamo $A = A^*$. □

Nel 'caso autoaggiunto', il Teorema 2.9 si estende a un arbitrario dato iniziale $u_0 \in X$ e produce una soluzione asintoticamente costante. Tuttavia, si può perdere il controllo per $t = 0$. Riformuliamo dunque il problema di Cauchy (2.1) come segue:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_0^+ \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Abbiamo in merito il seguente risultato di esistenza e unicità:

Teorema 3.2. *Siano A autoaggiunto, massimale monotono, $u_0 \in X$. Allora esiste un'unica soluzione $u \in C(\mathbb{R}^+, X) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+, X) \cap C(\mathbb{R}_0^+, D(A))$ di* (3.3), *inoltre si ha per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$*

(i) $\|u(t)\| \leqslant \|u_0\|$;

(ii) $\left\|\dfrac{du}{dt}(t)\right\| = \|A(u(t))\| \leqslant \dfrac{\|u_0\|}{t}$.

Dimostrazione. Proviamo l'esistenza di u e le maggiorazioni a priori, distinguendo due casi:

(a) Sia $u_0 \in D(A^2)$. Dal Lemma 2.8 sappiamo che per ogni $\lambda > 0$ esiste $u_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ soluzione di (2.4). Inoltre, esiste $u \in C^1(\mathbb{R}^+, X) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A))$ soluzione di (2.1), t.c. per $\lambda \to 0^+$ si ha in $C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, X)$

$$u_\lambda \to u, \ \frac{du_\lambda}{dt} \to \frac{du}{dt}.$$

Sappiamo anche che u verifica (i) (anche per $t = 0$). Rimane da provare (ii). A tal fine, dimostriamo che per ogni $\lambda > 0$, $t \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\|^2 \leqslant 0. \tag{3.4}$$

Infatti, posto $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$, come nella Proposizione 2.6 vediamo che per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{dv_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda(v_\lambda(t)) = 0.$$

Si ha pertanto, usando (1.3) e il Lemma 2.4 *(vi)*,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\|^2 &= 2\Big\langle\frac{d^2u_\lambda}{dt^2}(t),\frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\rangle\\ &= 2\Big\langle\frac{dv_\lambda}{dt}(t),v_\lambda(t)\Big\rangle\\ &= -2\langle A_\lambda(v_\lambda(t)),v_\lambda(t)\rangle\leqslant 0,\end{aligned}$$

da cui (3.4). Di conseguenza, la funzione

$$t\mapsto\Big\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\|^2$$

è non-crescente in $\mathbb{R}^+$. Ora fissiamo $t>0$. Per ogni $\lambda>0$, testando (2.4) con $u_\lambda(\tau)$ e integrando in $[0,t]$, otteniamo

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^t\Big\langle\frac{du_\lambda}{dt}(\tau)+A_\lambda(u_\lambda(\tau)),u_\lambda(\tau)\Big\rangle\,d\tau\\ &= \int_0^t\Big[\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(\tau)\|^2+\langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)),u_\lambda(\tau)\rangle\Big]\,d\tau\\ &= \frac{\|u_\lambda(t)\|^2}{2}-\frac{\|u_0\|^2}{2}+\int_0^t\langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)),u_\lambda(\tau)\rangle\,d\tau,\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^t\langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)),u_\lambda(\tau)\rangle\,d\tau\leqslant\frac{\|u_0\|^2}{2}. \tag{3.5}$$

Inoltre, l'operatore A_λ soddisfa una proprietà di simmetria analoga a (3.1): per ogni $x,y\in X$

$$\langle A_\lambda(x),y\rangle=\langle x,A_\lambda(y)\rangle.$$

Infatti, per (3.2) abbiamo

$$\begin{aligned}\langle A_\lambda(x),y\rangle &= \frac{1}{\lambda}\big[\langle x,y\rangle-\langle J_\lambda(x),y\rangle\big]\\ &= \frac{1}{\lambda}\big[\langle x,y\rangle-\langle x,J_\lambda(y)\rangle\big]=\langle x,A_\lambda(y)\rangle.\end{aligned}$$

Dunque, per ogni $\tau\in[0,t]$ abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)),u_\lambda(\tau)\rangle &= \Big\langle A_\lambda\Big(\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\Big),u_\lambda(\tau)\Big\rangle+\Big\langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)),\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\Big\rangle\\ &= 2\Big\langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)),\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\Big\rangle.\end{aligned}$$

Testiamo ora (2.4) con $\frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\tau$, e integriamo su $[0,t]$. Applicando (3.4), la relazione precedente, integrando per parti, e quindi usando (3.5), abbiamo

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^t \Big\langle \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau) + A_\lambda(u_\lambda(\tau)), \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau)\tau \Big\rangle \, d\tau \\
&= \int_0^t \Big\| \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau) \Big\|^2 \tau \, d\tau + \int_0^t \Big\langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)), \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau) \Big\rangle \tau \, d\tau \\
&\geqslant \Big\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \Big\|^2 \int_0^t \tau \, d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \Big(\frac{d}{d\tau} \langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)), u_\lambda(\tau) \rangle \Big) \tau \, d\tau \\
&= \Big\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \Big\|^2 \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \big[\langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)), u_\lambda(\tau) \rangle \tau \big]_0^t - \frac{1}{2} \int_0^t \langle A_\lambda(u_\lambda(\tau)), u_\lambda(\tau) \rangle \, d\tau \\
&\geqslant \Big\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \Big\|^2 \frac{t^2}{2} + \frac{\langle A_\lambda(u_\lambda(t)), u_\lambda(t) \rangle t}{2} - \frac{\|u_0\|^2}{4} \\
&\geqslant \Big\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \Big\|^2 \frac{t^2}{2} - \frac{\|u_0\|^2}{4}.
\end{aligned}$$

Dunque si ha per ogni, $\lambda > 0$, $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\Big\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \Big\| \leqslant \frac{\|u_0\|}{\sqrt{2}t}.$$

Passando al limite per $\lambda \to 0$ abbiamo

$$\Big\| \frac{du}{dt}(t) \Big\| \leqslant \frac{\|u_0\|}{\sqrt{2}t},$$

che in particolare implica *(ii)*.

(b) Sia ora $u_0 \in X$ arbitrario. Per il Lemma 2.2 *(ii)* (applicato due volte), $D(A^2)$ è un sottospazio denso di X. Dunque esiste una successione (w_n) in $D(A^2)$ t.c. $w_n \to u_0$ in X (in particolare, (w_n) è una successione di Cauchy in X). Come visto nel caso (a), per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $u_n \in C^1(\mathbb{R}^+, X) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A))$ soluzione di

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + A(u_n) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ u_n(0) = w_n. \end{cases}$$

e verificante per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\|u_n(t)\| \leqslant \|w_n\|, \ \Big\| \frac{du_n}{dt}(t) \Big\| = \|A(u_n(t))\| \leqslant \frac{\|w_n\|}{t}.$$

Come nella dimostrazione del Teorema 2.9, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_0^+$ ricaviamo

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \leqslant \|w_n - w_m\|, \ \Big\| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t) \Big\| \leqslant \frac{\|w_n - w_m\|}{t}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, $t \in \mathbb{R}_0^+$. Esiste allora $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n, m \geqslant \nu$ si ha

$$\|w_n - w_m\| < \varepsilon,$$

da cui

$$\|u_m(t) - u_n(t)\| < \varepsilon, \ \Big\| \frac{du_m}{dt}(t) - \frac{du_n}{dt}(t) \Big\| < \frac{\varepsilon}{t}.$$

Poiché X è completo, esistono due mappe $u, v : \mathbb{R}_0^+ \to X$ t.c. per ogni $0 < T_1 \leqslant T_2$ si ha

$$\lim_n \max_{t \in [T_1, T_2]} \|u_n(t) - u(t)\| = \lim_n \max_{t \in [T_1, T_2]} \Big\| \frac{du_n}{dt}(t) - v(t) \Big\| = 0.$$

FIGURA 3.

Ovvero, si ha in $C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_0^+, X)$

$$u_n \to u, \ \frac{du_n}{dt} \to v.$$

Pertanto, abbiamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{du}{dt}(t) = v(t),$$

e da $u_n(0) = w_n$ deduciamo che

$$\lim_{t \to 0} u(t) = \lim_n w_n = u_0.$$

Dunque precisiamo come segue: esiste $u \in C(\mathbb{R}^+, X) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+, X)$ t.c. $u(0) = u_0$ e per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$ si ha

$$\lim_n u_n(t) = u(t), \ \lim_n \frac{du_n}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(t),$$

da cui

$$\|u(t)\| \leqslant \|u_0\|, \ \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \leqslant \frac{\|u_0\|}{t}.$$

Infine, usando come nel Lemma 2.8 l'informazione che A è chiuso, per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$ abbiamo $u(t) \in D(A)$ e

$$\frac{du}{dt}(t) + A(u(t)) = 0.$$

In conclusione, $u \in C(\mathbb{R}^+, X) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+, X) \cap C(\mathbb{R}_0^+, D(A))$ è una soluzione di (3.3) soddisfacente (i), (ii).

Rimane da provare l'unicità di u. Siano $u, \tilde{u} \in C(\mathbb{R}^+, X) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+, X)$ soluzioni di (3.3) (con lo stesso dato iniziale u_0). Come visto sopra, per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$ si ha

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leqslant \|u(0) - \tilde{u}(0)\| = 0,$$

dunque si ha $u = \tilde{u}$. □

Osservazione 3.3. La differenza principale fra il Teorema 2.9 e il Teorema 3.2 è che in quest'ultimo la stima a priori sulla derivata vale in $\mathbb{R}_0^+$, ovvero la soluzione può avere una singolarità per $t = 0$ (fig. 3).

Osservazione 3.4. Anche in questo caso si può ottenere per la soluzione di (3.3) una maggiore regolarità, come nell'Osservazione 2.11 (ma senza ipotesi aggiuntive su u_0): per ogni $h, k \in \mathbb{N}$ si ha $u \in C^k(\mathbb{R}_0^+, D(A^h))$ (ved. [1, Theorem 7.7]).

Esercizio 3.5. Siano X uno spazio di Hilbert, $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore massimale monotono verificante (3.1). Dimostrare che A_λ è autoaggiunto per ogni $\lambda > 0$.

Esercizio 3.6. Dimostrare che se $A \in \mathcal{L}(X)$, allora si ha $u \in C^\infty(\mathbb{R}^+_0, X)$.

4. Equazione del calore

In questa sezione ci occupiamo dell'equazione del calore, introdotta nella Sezione 1. Associamo a tale equazione una condizione di Cauchy-Dirichlet, ottenendo il seguente problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } Q \\ u = 0 & \text{su } \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Ricordiamo che $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N > 1$) è un aperto limitato con frontiera $\Gamma = \partial\Omega$ di classe C^∞, $Q = \Omega \times \mathbb{R}^+_0$, $\Sigma = \Gamma \times \mathbb{R}^+_0$, il punto generico di Q viene indicato con $(x,t) = (x_1, \dots x_N, t)$ (fig. 1), e $u_0 \in L^2(\Omega)$. Il laplaciano è calcolato rispetto alle variabili spaziali, ovvero

$$\Delta u(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t).$$

L'equazione del calore è di tipo parabolico lineare. Il problema (4.1) fornisce un modello matematico dell'evoluzione della temperatura in un corpo Ω immerso in un ambiente a temperatura costante a partire da uno stato iniziale u_0.

Cominciamo col chiarire che cosa intendiamo per *soluzione* di (4.1). Come al solito, questa espressione può avere due significati:

Definizione 4.1. *Una soluzione classica di* (4.1) *è una funzione* $u \in C(\overline{Q})$ *t.c.*

(*i*) $u(\cdot, t) \in C^2(\overline{\Omega})$ *per ogni* $t \in \mathbb{R}^+$;
(*ii*) $u(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^+)$ *per ogni* $x \in \overline{\Omega}$;
(*iii*) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$ *per ogni* $(x,t) \in Q$;
(*iv*) $u(x,t) = 0$ *per ogni* $(x,t) \in \Sigma$;
(*v*) $u(x,0) = u_0(x)$ *per ogni* $x \in \Omega$.

Per calcolare direttamente una soluzione classica di (4.1) si può ricorrere a una funzione speciale detta *nucleo del calore* (ved. [4]). Qui seguiamo un altro approccio basato sul concetto di *soluzione debole* e sugli spazi di Sobolev (ved. [6]).

Consideriamo lo spazio di Hilbert $X = L^2(\Omega)$, con la norma usuale $\|\cdot\|_2$. Definiamo un operatore lineare (discontinuo) $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ponendo

$$D(A) = H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega), \ A(u) = -\Delta u.$$

Come nella Sezione 3, studiamo il problema di Cauchy (3.3) indotto da A:

Definizione 4.2. *Una soluzione debole di* (4.1) *è una soluzione di* (3.3), *ovvero una funzione* $u \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+_0, L^2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}^+_0, H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ *t.c.*

(*i*) $\dfrac{du}{dt}(t) + A(u(t)) = 0$ *per ogni* $t \in \mathbb{R}^+_0$;
(*ii*) $u(0) = u_0$.

Ovviamente, ogni soluzione classica di (4.1) è anche soluzione debole, mentre l'inverso non è vero in generale. Si noti che per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ (o $\mathbb{R}_0^+$) poniamo

$$u(t) = u(\cdot, t), \ \frac{du}{dt}(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t).$$

Siamo allora in grado di applicare il Teorema 3.2 e provare il seguente risultato di esistenza, unicità e regolarità per (4.1), che comprende anche una legge di conservazione (impropria):

Teorema 4.3. *Sia $u_0 \in L^2(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole u di (4.1), inoltre si ha*

(i) $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$*;*

(ii) $u \in L^2(\mathbb{R}_0^+, H_0^1(\Omega))$ *e per ogni $T > 0$*

$$\frac{\|u(T)\|_2^2}{2} + \int_0^T \|\nabla u(t)\|_2^2 \, dt = \frac{\|u_0\|_2^2}{2}.$$

Dimostrazione. Esaminiamo l'operatore $A : D(A) \subseteq L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definito come sopra. Proviamo innanzitutto che A è monotono. Infatti, per ogni $u \in D(A)$, applicando la formula di Gauß-Green (ved. [6]) si ha

$$\langle A(u), u\rangle = \int_\Omega (-\Delta u) u \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geqslant 0.$$

Inoltre, $I + A$ è suriettivo. Infatti, per ogni $f \in L^2(\Omega)$, dai risultati di [7] sappiamo che esiste (unica) la soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

Inoltre, per la teoria della regolarità (ved. ancora [7]), poiché il dominio è di classe C^∞, si ha $u \in H^2(\Omega)$. Tale funzione soddisfa per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \big[\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi\big] \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx,$$

ovvero si ha in $L^2(\Omega)$

$$u + A(u) = f.$$

Pertanto A è massimale monotono (Definizione 2.1). Osserviamo anche che A è simmetrico, in quanto (sempre per la formula di Gauß-Green) per ogni $u, v \in D(A)$ si ha

$$\langle A(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle u, A(v)\rangle.$$

Per il Lemma 3.1, A è un operatore autoaggiunto. Applichiamo al problema (3.3) il Teorema 3.2, deducendo che esiste un'unica soluzione $u \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+, L^2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}_0^+, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ di (3.3), che inoltre soddisfa per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\|u(t)\|_2 \leqslant \|u_0\|_2, \ \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_2 = \|\Delta u(t)\|_2 \leqslant \frac{\|u_0\|_2}{t}.$$

Per la Definizione 4.2, u è l'unica soluzione debole di (4.1).

Proviamo ora la regolarità di u (i). Per l'Osservazione 3.4, per ogni $h, k \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$u \in C^k(\mathbb{R}_0^+, D(A^h)).$$

D'altra parte, si vede facilmente (per induzione) che per ogni $h \in \mathbb{N}_0$[7]

$$D(A^h) = \big\{u \in H^{2h}(\Omega) : \ \Delta^j u = 0 \text{ su } \Gamma, \ j = 0, \dots h-1\big\}.$$

[7]Poniamo $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, $\Delta^0 u = u$.

FIGURA 4.

Dunque, per ogni $h, k \in \mathbb{R}_0^+$ abbiamo

$$u \in C^1(\mathbb{R}_0^+, H^{2h}(\Omega)). \tag{4.2}$$

Ricordando ora i Teoremi di immersione per gli spazi di Sobolev (ved. [6]), fissiamo $k \in \mathbb{N}_0$ e scegliamo $h \in \mathbb{N}_0$ t.c.

$$k < 2h - \frac{N}{2}.$$

Si ha allora $H^{2h}(\Omega) \subseteq C^k(\overline{\Omega})$. Da (4.2) segue allora $u \in C^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$ per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ (in forza dell'identificazione fra le derivate parziali della funzione $u : Q \to \mathbb{R}$ e quelle della mappa $u : \mathbb{R}_0^+ \to C^k(\overline{\Omega})$), da cui *(i)*.

Infine proviamo *(ii)*. Per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ poniamo

$$\Phi(t) = \frac{\|u(t)\|_2^2}{2}.$$

Chiaramente $\Phi \in C(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+)$, inoltre, applicando (1.3) e (4.1), per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$ si ha

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \int_\Omega u(t) \frac{du}{dt}(t)\, dx \\ &= \int_\Omega u(t) \Delta u(t)\, dx = -\|\nabla u(t)\|_2^2 \leqslant 0.\end{aligned}$$

Dunque Φ è monotona non-crescente in $\mathbb{R}^+$, con

$$\Phi(0) = \frac{\|u_0\|_2^2}{2}, \ \lim_{t \to \infty} \Phi(t) = \phi_\infty \in [0, \infty).$$

In particolare, Φ è limitata in $\mathbb{R}^+$. Per ogni $0 < \varepsilon < T$ si ha

$$\Phi(T) - \Phi(\varepsilon) = \int_\varepsilon^T \Phi'(t)\, dt = -\int_\varepsilon^T \|\nabla u(t)\|_2^2\, dt.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ abbiamo

$$\Phi(T) - \frac{\|u_0\|_2^2}{2} = -\int_0^T \|\nabla u(t)\|_2^2\, dt,$$

da cui la legge di conservazione. Infine, passando al limite per $T \to \infty$ abbiamo

$$\int_0^\infty \|\nabla u(t)\|_2^2\, dt = \frac{\|u_0\|_2^2}{2} - \phi_\infty < \infty,$$

da cui $u \in L^2(\mathbb{R}_0^+, H_0^1(\Omega))$ (su $H_0^1(\Omega)$ adottiamo la norma $\|\nabla u\|_2$, grazie alla Diseguaglianza di Poincaré, ved. [6]). Ciò prova *(ii)*, e quindi conclude la dimostrazione. $\square$

Osservazione 4.4. Come visto nel Teorema 4.3 *(i)*, l'equazione del calore ha un forte (e immediato) effetto regolarizzante sul dato iniziale (fig. 4), che non si applica 'all'indietro'. Ciò esprime matematicamente il carattere *irreversibile* del fenomeno di diffusione del calore. Anche *(ii)* ha un significato fisico: l'energia termica complessiva del sistema diminuisce, man mano che il calore si diffonde.

Sotto ipotesi più restrittive circa il dato iniziale u_0, possiamo dimostrare ulteriori proprietà della soluzione u:

Corollario 4.5. *Siano $u_0 \in L^2(\Omega)$, u la soluzione di (4.1):*

(i) se $u_0 \in H^1_0(\Omega)$, allora $u \in C(\mathbb{R}^+, H^1_0(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+_0, H^2(\Omega))$, $\frac{du}{dt} \in L^2(\mathbb{R}^+_0, L^2(\Omega))$, e per ogni $T > 0$

$$\frac{\|\nabla u(T)\|_2^2}{2} + \int_0^T \Big\|\frac{du}{dt}(t)\Big\|_2^2\,dt = \frac{\|\nabla u_0\|_2^2}{2}.$$

(ii) se $u_0 \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, allora $u \in C(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+_0, H^2(\Omega))$, $\frac{du}{dt} \in L^2(\mathbb{R}^+_0, H^1_0(\Omega))$;

(iii) se per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $u_0 \in H^k(\Omega)$ e $\Delta^k u_0 = 0$ su Γ, allora $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+)$ è soluzione classica di (4.1).

Dimostrazione. Proviamo *(i)*, servendoci dello stesso schema usato nel Teorema 4.3 ma con una diversa scelta degli spazi e dell'operatore. Poniamo $X = H^1_0(\Omega)$, spazio di Hilbert dotato (questa volta) della norma completa

$$\|u\| = \big(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Definiamo l'operatore lineare (discontinuo) $A : D(A) \subset H^1_0(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$ ponendo

$$D(A) = \big\{u \in H^1_0(\Omega) \cap H^3(\Omega) :\ \Delta u \in H^1_0(\Omega)\big\},\ A(u) = -\Delta u.$$

Anche in questo caso, l'operatore A è monotono. Si ha infatti per ogni $u \in D(A)$

$$\begin{aligned}\langle A(u), u\rangle &= \int_\Omega \big[\nabla(-\Delta u)\cdot\nabla u + (-\Delta u)u\big]\,dx \\ &= \int_\Omega \big[(\Delta u)^2 + |\nabla u|^2\big]\,dx \geqslant 0.\end{aligned}$$

Inoltre, $I + A$ è suriettivo. Infatti, per ogni $f \in H^1_0(\Omega)$ il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

ammette una (unica) soluzione $u \in H^1_0(\Omega) \cap H^3(\Omega)$ (ved. [7]), per la quale si ha anche

$$\Delta u = u - f \in H^1_0(\Omega),$$

da cui $u \in D(A)$ e in $L^2(\Omega)$

$$u + A(u) = f.$$

Per la Definizione 2.1, A è massimale monotono. Verifichiamo che A è simmetrico: per ogni $u, v \in D(A)$ abbiamo

$$\begin{aligned}\langle A(u), v\rangle &= \int_\Omega \big[\nabla(-\Delta u)\cdot\nabla v + (-\Delta u)v\big]\,dx \\ &= \int_\Omega \big[\nabla u\cdot\nabla(-\Delta v) + u(-\Delta v)\big]\,dx = \langle u, A(v)\rangle.\end{aligned}$$

Per il Lemma 3.1, A è autoaggiunto. Dunque, per il Teorema 3.2 esiste un'unica soluzione $u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+, H_0^1(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}_0^+, D(A))$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_0^+ \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$ si ha

$$\|u(t)\| \leqslant \|u_0\|, \ \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| = \|\Delta u(t)\| \leqslant \frac{\|u_0\|}{t}$$

(ricordiamo la definizione di $\|\cdot\|$). Da (4.3) ricaviamo per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\frac{du}{dt}(t) - \Delta u(t) = 0,$$

dunque, per l'unicità della soluzione debole di (4.1), deduciamo che questa $u \in C(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)$ coincide con quella del Teorema 4.3.

Restano da provare le proprietà di integrabilità di u. Operiamo come nel Teorema 4.3, ponendo stavolta per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\Phi(t) = \frac{\|\nabla u(t)\|_2^2}{2}.$$

Ovviamente $\Phi \in C(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$ abbiamo

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \int_\Omega \nabla\Big(\frac{du}{dt}(t)\Big) \cdot \nabla u(t)\, dx \\ &= -\int_\Omega \frac{du}{dt}(t) \Delta u(t)\, dx \\ &= -\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_2^2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Anche in questo caso, pertanto, Φ è monotona non-crescente e limitata in $\mathbb{R}^+$ con

$$\Phi(0) = \frac{\|\nabla u_0\|_2^2}{2}, \ \lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \phi_\infty \in [0, \infty).$$

Per ogni $0 < \varepsilon < T$ si ha

$$\Phi(T) - \Phi(\varepsilon) = \int_\varepsilon^T \Phi'(t)\, dt = -\int_\varepsilon^T \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_2^2 dt.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ abbiamo

$$\Phi(T) - \frac{\|\nabla u_0\|_2^2}{2} = -\int_0^T \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_2^2 dt,$$

da cui la legge di conservazione. Inoltre, passando al limite per $T \to \infty$ abbiamo

$$\int_0^\infty \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_2^2 dt = \frac{\|\nabla u_0\|_2^2}{2} - \phi_\infty,$$

da cui $\frac{du}{dt} \in L^2(\mathbb{R}_0^+, L^2(\Omega))$. Infine, da (4.1) abbiamo

$$\int_0^\infty \|\Delta u(t)\|_2^2\, dt < \infty.$$

Ricordando che $u \in L^2(\mathbb{R}_0^+, L^2(\Omega))$ (Teorema 4.3 *(ii)*) e che

$$u \mapsto \big(\|u\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2\big)^{\frac{1}{2}}$$

è una norma equivalente su $H^2(\Omega)$, abbiamo $u \in L^2(\mathbb{R}_0^+, H^2(\Omega))$. Così si conclude la dimostrazione di *(i)*.

Similmente, con scelte opportune degli spazi e degli operatori, si dimostrano *(ii)*, *(iii)*. □

Il problema (4.1) si può anche risolvere per *decomposizione spettrale*. Siano (λ_n) la successione degli autovalori di $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$ e (e_n) la corrispondente base ortonormale di $L^2(\Omega)$ t.c. $e_n \in H_0^1(\Omega)$ è un'autofunzione associata a λ_n per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ (ved. [7]). Cerchiamo una soluzione di (4.1) della forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) e_n(x), \tag{4.4}$$

con $a_n \in C^1(\mathbb{R}^+)$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$. Da (4.1) ricaviamo per ogni $(x,t) \in Q$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \big[a_n'(t)e_n(x) - a_n(t)\Delta e_n(x)\big] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \big[a_n'(t) + \lambda_n a_n(t)\big] e_n(x). \end{aligned}$$

Poiché (e_n) è una base ortonormale di $L^2(\Omega)$, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}_0^+$ abbiamo

$$a_n'(t) + \lambda_n a_n(t) = 0.$$

Risolvendo la precedente equazione differenziale ordinaria abbiamo

$$a_n(t) = a_n(0)e^{-\lambda_n t}.$$

Rimane da calcolare la successione numerica $(a_n(0))$. Dalla condizione iniziale di (4.1) abbiamo

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) e_n,$$

e dall'Identità di Parseval (ved. [7]) ricaviamo i coefficienti

$$a_n(0) = \int_\Omega u_0 e_n \, dx.$$

Sostituendo in (4.4), abbiamo per ogni $(x,t) \in Q$[8]

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\int_\Omega u_0 e_n \, dy\Big] \frac{e_n(x)}{e^{\lambda_n t}}.$$

Anche per l'equazione del calore vale il *principio del massimo* (in una forma diversa da quella vista in [7]), che permette di stimare i valori della soluzione a partire da quelli del dato iniziale:

Teorema 4.6. *Siano $u_0 \in L^2(\Omega)$, u la soluzione di (4.1). Allora si ha per ogni $(x,t) \in Q$*

$$\min\Big\{0, \inf_\Omega u_0\Big\} \leqslant u(x,t) \leqslant \max\Big\{0, \sup_\Omega u_0\Big\}^{9}.$$

[8] Per semplicità tralasciamo il problema della convergenza della serie.

[9] Gli estremi di u_0 sono *essenziali*.

Dimostrazione. Proviamo la stima dall'alto. Poniamo

$$K = \max\Big\{0, \sup_{\Omega} u_0\Big\}.$$

Senza perdita di generalità possiamo supporre $K < \infty$. Scegliamo una funzione $g \in C^1(\mathbb{R})$ t.c. $g(t) = 0$ per ogni $t \leqslant 0$, $0 < g'(t) \leqslant M$ ($M > 0$) per ogni $t > 0$, e poniamo per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$G(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau.$$

Quindi poniamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\Psi(t) = \int_\Omega G(u(x,t) - K)\, dx \ (\geqslant 0).$$

Allora si ha $\Psi \in C(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}^+_0)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}^+_0$, da (4.1) e dalla formula di Gauß-Green segue

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= \int_\Omega g(u(x,t) - K)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dx \\ &= \int_\Omega g(u(x,t) - K)\Delta u(x,t)\, dx \\ &= -\int_\Omega g'(u(x,t) - K)|\nabla u(x,t)|^2\, dx \leqslant 0.\end{aligned}$$

Dunque Ψ è monotona non-crescente in $\mathbb{R}^+$. D'altra parte si ha

$$\Psi(0) = \int_\Omega G(u(x,0) - K)\, dx = 0,$$

da cui $\Psi(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$. Abbiamo dunque per ogni $(x,t) \in Q$

$$u(x,t) \leqslant K.$$

Similmente si dimostra la stima dal basso. □

Dal Teorema 4.6 si deducono facilmente i seguenti controlli sulla soluzione:

Corollario 4.7. *Siano $u_0 \in L^2(\Omega)$, u la soluzione di (4.1):*

(i) se $u_0 \geqslant 0$ q.o. in Ω, allora $u \geqslant 0$ in Q;
(ii) se $u_0 \leqslant 0$ q.o. in Ω, allora $u \leqslant 0$ in Q;
(iii) se $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, allora per ogni $t \in \mathbb{R}^+_0$ si ha $u(t) \in L^\infty(\Omega)$ con $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Dimostrazione. Proviamo *(i)*. Se $u_0 \geqslant 0$ q.o. in Ω, dal Teorema 4.6 abbiamo per ogni $(x,t) \in Q$

$$u(x,t) \geqslant \min\Big\{0, \inf_\Omega u_0\Big\} = 0.$$

Similmente si provano *(ii)*, *(iii)*. □

Osservazione 4.8. Nella proprietà *(iii)*, in generale non si ha l'eguaglianza: fisicamente, ciò esprime la natura *dissipativa* del fenomeno di diffusione del calore.

Risultati simili si ottengono per l'equazione del calore con condizioni di Cauchy-Neumann, che modellizza l'evoluzione della temperatura in un corpo Ω senza scambi di calore con l'ambiente a partire da uno stato iniziale u_0:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } Q \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

dove ν denota il versore normale uscente su Γ (e quindi su Σ), ved. [1, Chapter 10].

Esercizio 4.9. Completare la dimostrazione del Corollario 4.5.

Esercizio 4.10. Completare la dimostrazione del Teorema 4.6.

Esercizio 4.11. Completare la dimostrazione del Corollario 4.7.

Esercizio 4.12. Si può risolvere il problema (4.5) per decomposizione spettrale?

5. Equazione delle onde

In quest'ultima sezione ci occupiamo dell'equazione delle onde, introdotta nella Sezione 1. Associamo a tale equazione una condizione di Cauchy-Dirichlet, in cui la condizione iniziale (di Cauchy) si compone di due eguaglianze:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{in } Q \\ u = 0 & \text{su } \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

Le ipotesi su Ω, Γ, Σ, Q sono identiche a quelle della Sezione 4. Lo stato iniziale u_0 e la velocità iniziale v_0 saranno invece soggette a ipotesi più restrittive, per ragioni che saranno chiarite nel seguito.

L'equazione delle onde è di tipo iperbolico lineare. Il problema (5.1) fornisce un modello matematico del moto oscillatorio di un fluido contenuto in un recipiente di base Ω, con livello costante sul bordo. Anche in questo caso abbiamo due definizioni di *soluzione*:

Definizione 5.1. *Una soluzione classica di (5.1) è una funzione $u \in C^2(\overline{Q})$ t.c.*

(i) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$ *per ogni* $(x,t) \in Q$*;*
(ii) $u(x,t) = 0$ *per ogni* $(x,t) \in \Sigma$*;*
(iii) $u(x,0) = u_0(x)$ *per ogni* $x \in \Omega$*;*
(iv) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$ *per ogni* $x \in \Omega$.

Più conveniente per il nostro approccio è la seguente:

Definizione 5.2. *Una soluzione debole di (5.1) è una funzione $u \in C(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ t.c.*

(i) $\dfrac{d^2 u}{dt^2}(t) - \Delta u(t) = 0$ *per ogni* $t \in \mathbb{R}^+$*;*
(ii) $u(0) = u_0$*;*
(iii) $\dfrac{du}{dt}(0) = v_0$.

Ogni soluzione classica di (5.1) è anche soluzione debole, mentre l'inverso non vale in generale. Oltre a quelle introdotte nella Sezione 4, adottiamo per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ l'identificazione

$$\frac{d^2 u}{dt^2}(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, t).$$

Per il problema (5.1) abbiamo un risultato di esistenza, unicità e conservazione (in senso proprio):

Teorema 5.3. *Siano $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole u di (5.1). Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$ si ha*

$$\Big\| \frac{du}{dt}(t) \Big\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 = \|v_0\|_2^2 + \|\nabla u_0\|_2^2.$$

Dimostrazione. Al fine di ridurre l'ordine dell'equazione, riformuliamo (5.1) come un *sistema* di equazioni differenziali. Poniamo $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, così che (5.1) è equivalente al problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v = 0 & \text{in } Q \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } Q \\ u = v = 0 & \text{su } \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{5.2}$$

Mostriamo ora come si può ricondurre il problema (5.2) al modello generale (2.1). Poniamo $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e denotiamo $U = (u, v)$ gli elementi di X. Definiamo su X un prodotto scalare ponendo per ogni $U_1 = (u_1, v_1)$, $U_2 = (u_2, v_2)$

$$\langle U_1, U_2 \rangle = \int_\Omega \big[\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + v_1 v_2\big]\, dx.$$

Il prodotto è ben definito per la Diseguaglianza di Poincaré (ved. [6]), e si vede facilmente che X è uno spazio di Hilbert con la norma $\|\cdot\|_X$ indotta da tale prodotto. Definiamo un operatore lineare (discontinuo) $A : D(A) \subseteq X \to X$ ponendo

$$D(A) = \big\{U = (u, v) \in X : \, u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \, v \in H_0^1(\Omega)\big\}$$

e per ogni $U = (u, v) \in D(A)$

$$A(U) = (-v, -\Delta u).$$

L'operatore A è densamente definito in X. Poniamo $U_0 = (u_0, v_0)$. Il sistema (5.2) si riformula ulteriormente come un problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + A(U) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Infatti, sia $U = (u, v)$ una soluzione di (5.2). Allora si ha per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt}(t) &= \Big(\frac{du}{dt}(t), \frac{dv}{dt}(t)\Big) \\ &= \big(v(t), \Delta u(t)\big) = -A(U(t)), \end{aligned}$$

così che U risolve (5.3), e viceversa. Inoltre, per ipotesi si ha $U_0 \in D(A)$.
Verifichiamo le proprietà dell'operatore A. Osserviamo che A è monotono: infatti, per ogni $U = (u, v) \in D(A)$ si ha (per la formula di Gauß-Green)

$$\begin{aligned} \langle A(U), U \rangle &= \int_\Omega \big[(-\nabla v) \cdot \nabla u + (-\Delta u) v\big]\, dx \\ &= \int_\Omega \big[- \nabla v \cdot \nabla u + \nabla u \cdot \nabla v\big]\, dx = 0. \end{aligned}$$

Inoltre, $I + A$ è suriettivo. Per ogni $F = (f, g) \in X$, consideriamo l'equazione funzionale

$$U + A(U) = F. \tag{5.4}$$

Consideriamo il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x) + g(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

Dai risultati di [7] sappiamo che questo problema ammette una (unica) soluzione $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Poniamo ora (ricordando che $f \in H_0^1(\Omega)$)

$$v = u - f \in H_0^1(\Omega).$$

Si ha pertanto

$$\begin{cases} u - v = f(x) & \text{in } \Omega \\ v - \Delta u = g(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Posto $U = (u, v)$, deduciamo che $U \in D(A)$ risolve (5.4). Dunque A è massimale monotono. Per il Teorema 2.9, esiste un'unica soluzione $U = (u, v) \in C^1(\mathbb{R}^+, X) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A))$ di (5.3). Si ha allora per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{du}{dt}(t) = v(t),$$

da cui segue $u \in C(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$. Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) - \Delta u(t) = \frac{dv}{dt}(t) - \Delta u(t) = 0,$$

e inoltre

$$u(0) = u_0, \ \frac{du}{dt}(0) = v_0.$$

Per la Definizione 5.2, u è soluzione debole di (5.1). Viceversa, si vede facilmente che se u è soluzione debole di (5.1), allora $U = (u, \frac{du}{dt})$ risolve (5.3). Pertanto u è unica.

Per completare la dimostrazione, testiamo (5.1) con $\frac{du}{dt}$. Si ha allora per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ (applicando (1.3))

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \Big[\frac{d^2u}{dt^2}(t) - \Delta u(t)\Big] \frac{du}{dt}(t)\, dx \\ &= \int_\Omega \frac{d^2u}{dt^2}(t) \frac{du}{dt}(t)\, dx + \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla\Big(\frac{du}{dt}(t)\Big)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\Big\|\frac{du}{dt}(t)\Big\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2\Big]. \end{aligned}$$

Dunque la mappa

$$t \mapsto \Big\|\frac{du}{dt}(t)\Big\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2$$

è costante in $\mathbb{R}^+$. Abbiamo allora per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\Big\|\frac{du}{dt}(t)\Big\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 = \|v_0\|_2^2 + \|\nabla u_0\|_2^2,$$

il che conclude la dimostrazione. □

La regolarità della soluzione migliora sotto ipotesi più restrittive circa i dati iniziali. Per esempio si ha (ved. [1, Theorem 10.8]):

Corollario 5.4. *Siano u_0, v_0, u come nel Teorema 5.3. Se $u_0, v_0 \in H^k(\Omega)$ e $\Delta^k u_0 = \Delta^k v_0 = 0$ su Γ, per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+)$ è una soluzione classica di (5.1).*

FIGURA 5.

Osservazione 5.5. A differenza dall'equazione del calore, quella delle onde descrive un fenomeno *conservativo*: per questo nel Teorema 5.3 l'energia complessiva della soluzione è costante. D'altra parte, non si osserva un effetto regolarizzante rispetto ai dati, il che significa che la propagazione del moto ondoso è *reversibile*. Osserviamo anche che per (5.1) non vale in generale un principio del massimo (fig. 5). Inoltre, l'operatore A definito sopra *non è* autoaggiunto (si ha invece $A^* = -A$), il che restringe la scelta dei dati iniziali come si è visto nel Teorema 5.3.

Accenniamo infine alla risoluzione di (5.1) per *decomposizione spettrale*. Anche in questo caso, cerchiamo una soluzione della forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) e_n(x), \tag{5.5}$$

dove (λ_n), (e_n) hanno lo stesso significato della Sezione 4. Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, da (5.1) segue che $a_n \in C^2(\mathbb{R}^+)$ soddisfa per ogni $t \in \mathbb{R}^+$

$$a_n''(t) + \lambda_n a_n(t) = 0.$$

Risolvendo questa equazione differenziale ordinaria (e ricordando che $\lambda_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ved. [7]) si ha

$$a_n(t) = a_n(0)\cos(\sqrt{\lambda_n}t) + \frac{a_n'(0)}{\sqrt{\lambda_n}}\sin(\sqrt{\lambda_n}t).$$

Per determinare i valori iniziali di a_n, a_n' basta sviluppare u_0, v_0 nella base (e_n), ottenendo

$$a_n(0) = \int_\Omega u_0 e_n\,dx, \;\; a_n'(0) = \int_\Omega v_0 e_n\,dx.$$

Sostituendo in (5.5) otteniamo per ogni $(x,t) \in Q$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(\int_\Omega u_0 e_n\,dy\Big)\cos(\sqrt{\lambda_n}t) + \Big(\int_\Omega v_0 e_n\,dy\Big)\frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}t)}{\sqrt{\lambda_n}}\Big]e_n(x).$$

In modo simile si studia l'equazione delle onde con condizione di Neumann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{in } Q \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{5.6}$$

Esercizio 5.6. Dimostrare che l'operatore A definito nel Teorema 5.3 non è autoaggiunto.

Esercizio 5.7. Dimostrare il Corollario 5.4.

Riferimenti bibliografici

[1] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer (2011)
[2] K. Deimling, Ordinary differential equations in Banach spaces, Springer (1977)
[3] E. Di Benedetto, Degenerate parabolic equations, Springer (1993)
[4] L.C. Evans, Partial differential equations, American Mathematical Society (1998)
[5] A. Iannizzotto, Spazi di Hilbert e operatori lineari
[6] A. Iannizzotto, Spazi di Sobolev
[7] A. Iannizzotto, Equazioni alle derivate parziali lineari/1: Problemi stazionari
[8] F. John, Partial differential equations, Springer (1971)
[9] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer (1983)

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Cagliari
Via Ospedale 72, 09124 Cagliari, Italy
Email address: antonio.iannizzotto@unica.it