EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI LINEARI/1: PROBLEMI STAZIONARI

ANTONIO IANNIZZOTTO

SOMMARIO. Equazioni alle derivate parziali del secondo ordine lineari ellittiche: condizioni di Dirichlet, Neumann, definizioni di soluzione classica, debole. Problema di Dirichlet omogeneo per un'equazione ellittica: esistenza e unicità della soluzione debole, regolarità, ritorno alla soluzione classica. Principio del massimo. Esistenza mediante il Teorema di alternativa di Fredholm. Problema agli autovalori: spettro del laplaciano, caratterizzazione degli autovalori, decomposizione spettrale. Altri casi: equazione di Poisson, problema di Dirichlet omogeneo, problema di Neumann, problema di Robin, operatori ellittici, p-laplaciano.

INDICE

1.	Soluzioni classiche e deboli	1
2.	Problema di Dirichlet: esistenza e unicità	4
3.	Problema di Dirichlet: regolarità	5
4.	Altre EDP ellittiche	18
5.	Il principio del massimo	22
6.	Lo spettro del laplaciano	24
7.	L'operatore p-Laplaciano	26
	Riferimenti bibliografici	28

Versione del 28 maggio 2022

Di ciò che sempre non è ora vedremo i portenti,
di ciò che sempre è ora vedremo i confini.
LAO TSE

1. SOLUZIONI CLASSICHE E DEBOLI

Un'equazione alle derivate parziali (EDP) del secondo ordine lineare è un problema del tipo

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{h=1}^{N} b_h(x)\frac{\partial u}{\partial x_h} + c(x)u = f(x) \text{ in } \Omega, \tag{1.1}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N > 1)$ è un dominio (cioè un insieme aperto connesso) e $a_{ij}, b_h, c, f : \Omega \to \mathbb{R}$ sono funzioni (di solito continue). Le equazioni del secondo ordine sono sufficienti a descrivere la maggior parte dei fenomeni fisici, biologici e sociali in quanto incorporano informazioni sullo stato del sistema (descritto dalla funzione u), sulla sua velocità (descritta dal gradiente ∇u) e sulla sua accelerazione (descritta dalla matrice hessiana D^2u). Una *soluzione classica* di (1.1) è una funzione $u \in C^2(\Omega)$ t.c. per ogni $x \in \Omega$ si ha

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{h=1}^{N} b_h(x)\frac{\partial u}{\partial x_h}(x) + c(x)u(x) = f(x).$$

Le EDP lineari si classificano secondo il carattere della loro parte principale, ovvero dei coefficienti dei termini del secondo ordine, riuniti nella matrice $A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1}^N$. Per il Teorema di Schwarz, possiamo supporre che A sia simmetrica in Ω, ovvero che $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j = 1, \dots N$). Altrimenti, riformuliamo equivalentemente (1.1) con i seguenti coefficienti nella parte principale:

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}.$$

Inoltre, a meno di un cambio di segno, possiamo sempre supporre che A abbia almeno un autovalore positivo:

(a) se tutti gli autovalori di A sono positivi, (1.1) è detta *ellittica*;
(b) se un autovalore di A è 0 e gli altri sono positivi, (1.1) è detta *parabolica*;
(c) se un autovalore di A è negativo e gli altri sono positivi, (1.1) è detta *iperbolica*.

Ovviamente, questa classificazione non è esaustiva, tuttavia essa abbraccia le EDP lineari più importanti (ved. [5]). Inoltre, essa si estende al caso *semilineare*, ovvero quello in cui i termini dipendenti da $(x, u, \nabla u)$ non sono lineari. Dal punto di vista fisico, si osserva che le equazioni ellittiche descrivono fenomeni *stazionari* ovvero stati di equilibrio di un sistema, mentre le equazioni paraboliche e iperboliche (in cui la variabile corrispondente all'autovalore nullo o negativo viene interpretata come variabile temporale) descrivono fenomeni *evolutivi*. Qui ci limitiamo allo studio del caso (a), rimandando a [10] per i casi (b), (c). In tal caso, sappiamo dall'algebra lineare che la forma quadratica indotta dalla matrice $A(x)$ è definita positiva, ovvero esiste $\alpha > 0$ t.c. per ogni $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ vale la seguente condizione di *uniforme ellitticità*[1]

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2. \tag{1.2}$$

Per approfondimenti sulle EDP ellittiche rimandiamo a [4, 5, 7, 11].

Per evitare complicazioni tecniche, svolgeremo la teoria nel caso più semplice (rinviando alle Sezioni 4 - 5 e a [2, Chapter 9] per problemi più generali). Poniamo $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_h = 0$, $c = 1$, così che (1.1) si riduce alla seguente EDP:

$$-\Delta u + u = f(x) \text{ in } \Omega,$$

dove

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

è l'operatore *laplaciano* (per $f = 0$ l'EDP è detta *omogenea*). Ad essa abbineremo una condizione al contorno detta *condizione di Dirichlet omogenea*, richiedendo che u si annulli sulla frontiera $\Gamma = \partial\Omega$. Consideriamo quindi il problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases} \tag{1.3}$$

Definizione 1.1. *Una soluzione classica di* (1.3) *è una funzione* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *t.c.*

(i) $-\Delta u(x) + u(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in \Omega$;
(ii) $u(x) = 0$ *per ogni* $x \in \Gamma$.

Come si vede dalla Definizione 1.1, il problema (1.3) può ammettere una soluzione classica solo in particolari casi (per esempio, si deve avere $f \in C(\Omega)$), inoltre il calcolo esplicito di tale soluzione è in generale complesso e dipende fortemente dalla forma dell'equazione (ved. [5]). Condurremo invece uno studio qualitativo, basato sul seguente metodo articolato in 3 passi:

[1] In realtà questo richiede che $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$ e che $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sia limitato.

(1) definire una nozione alternativa, *debole*, di soluzione per (1.3) (usando gli spazi di Sobolev introdotti in [9]);
(2) dimostrare, con metodi di analisi funzionale, l'esistenza e l'unicità di tale soluzione debole (usando la teoria svolta in [8]);
(3) studiare la regolarità della soluzione debole, riconducendola infine a una soluzione classica.

Questo metodo, che esporremo per il problema (1.3), si estende facilmente a problemi molto più generali.

Definizione 1.2. *Una soluzione debole di* (1.3) *è una funzione* $u \in H_0^1(\Omega)$ *t.c. per ogni* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi)\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx.$$

Nella Definizione 1.2 non compaiono le derivate seconde di u (nemmeno in senso debole). Inoltre, se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$, allora il funzionale lineare

$$\varphi \mapsto \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi)\, dx - \int_\Omega f\varphi\, dx$$

è ben definito e continuo in $H_0^1(\Omega)$, dunque per densità si può riformulare la Definizione 1.2 prendendo le funzioni test in $C_c^\infty(\Omega)$ o in $C_c^1(\Omega)$ (ved. [9]).

Proposizione 1.3. *Siano* Ω *di classe* C^1, $f \in C(\overline{\Omega})$, $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ *una soluzione classica di* (1.3). *Allora* u *è una soluzione debole di* (1.3).

Dimostrazione. Dalla Definizione 1.1 *(ii)* segue $u \in H_0^1(\Omega)$ (ved. [9]). Sia ora $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, per la formula di Gauß-Green e la Definizione 1.1 *(i)* si ha

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi)\, dx = \int_\Omega (-\Delta u + u)\varphi\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi\, d\Gamma = \int_\Omega f\varphi\, dx,$$

dunque u è una soluzione debole di (1.3). □

Poiché Ω può essere illimitato, abbiamo dovuto richiedere $u \in H^1(\Omega)$. In generale, infatti, una soluzione classica può non ricadere nello spazio $H_0^1(\Omega)$ e pertanto non essere una soluzione debole.

Esempio 1.4. Sul dominio $\mathbb{R}^2$ consideriamo la funzione di Gauß

$$u(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

Si vede facilmente che u è soluzione classica di

$$-\Delta u + u = \frac{5 - 4(x^2 + y^2)}{e^{x^2+y^2}} \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

Inoltre $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, dunque essa è anche soluzione debole della stessa equazione.

Esempio 1.5. Consideriamo l'equazione di Laplace:

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

Essa ammette infinite soluzioni, tra cui le costanti $u(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$), ma solo per $c = 0$ si ha $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Esercizio 1.6. Dimostrare che nell'equazione (1.1) si può supporre $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j \in \{1, \dots N\}$.

Esercizio 1.7. Svolgere i calcoli dell'Esempio 1.4.

2. Problema di Dirichlet: esistenza e unicità

In questa sezione dimostriamo che, per ogni $f \in L^2(\Omega)$, il problema (1.3) ammette un'unica soluzione debole, caratterizzata come punto di minimo globale del corrispondente *funzionale dell'energia*. Questo approccio è caratteristico dei *metodi variazionali* (ved. [3, 14]).

Teorema 2.1. *Sia $f \in L^2(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega)$ di (1.3). Inoltre, posto*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\,dx - \int_\Omega fu\,dx,$$

si ha

$$J(u) = \min_{v \in H^1_0(\Omega)} J(v).$$

Dimostrazione. Lo spazio di Sobolev $H^1_0(\Omega)$ con la norma

$$\|u\| = \Big(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

è uno spazio di Hilbert separabile (ved. [9]). Su di esso definiamo una forma bilineare continua, coerciva, simmetrica (il prodotto scalare) ponendo per ogni $u, v \in H^1_0(\Omega)$

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\,dx.$$

Inoltre, poniamo per ogni $u \in H^1_0(\Omega)$

$$h(u) = \int_\Omega fu\,dx.$$

Per la caratterizzazione vista in [9], abbiamo $h \in H^{-1}(\Omega)$. Dunque, per il Teorema di Lax-Milgram (ved. [8]), esiste un'unica $u \in H^1_0(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$a(u,\varphi) = h(\varphi),$$

quindi u è soluzione debole di (1.3) (Definizione 1.2). Inoltre, u è l'unico punto di minimo globale del funzionale $J : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ definito da

$$J(v) = \frac{a(v,v)}{2} - h(v),$$

come provato in [8]. □

La condizione al contorno, fissando alcuni valori della funzione incognita, assicura l'unicità della soluzione (in questo senso, essa svolge lo stesso ruolo della condizione di Cauchy nelle equazioni differenziali ordinarie).

Osservazione 2.2. Se Ω è illimitato, occorre osservare che l'unicità della soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega)$ *non implica* l'unicità della soluzione classica: infatti, il problema (1.3) potrebbe ammettere una soluzione classica $\tilde{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ che non appartiene a $H^1_0(\Omega)$. Nella richiesta che $u \in H^1_0(\Omega)$ è implicita una 'condizione di Dirichlet asintotica' del tipo

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

Esercizio 2.3. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $m \in L^\infty(\Omega)$ una funzione positiva, $f \in L^2(\Omega)$. Dimostrare che il problema

$$\begin{cases} -\Delta u + m(x)u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione debole.

Esercizio 2.4. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato, $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^N$ una matrice simmetrica formata da funzioni $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$ verificanti (1.2), $f \in L^2(\Omega)$. Dimostrare che esiste unica la soluzione debole di

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

3. Problema di Dirichlet: regolarità

In questa sezione *assumiamo* l'esistenza di una soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ di (1.3) (garantita dal Teorema 2.1) e proviamo che, sotto ipotesi più restrittive su Ω e su f, essa guadagna una maggiore regolarità, fino a qualificarsi come soluzione classica. In generale, per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale la seguente implicazione:

$$f \in H^m(\Omega),\ \Omega \in C^{m+2} \implies u \in H^{m+2}(\Omega)^2.$$

La teoria della regolarità qui esposta è basata sul *metodo delle traslazioni di Nirenberg.* Per ogni $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{R}^N$ poniamo

$$T_h u(x) = u(x+h),\ D_h u(x) = \frac{T_h u(x) - u(x)}{|h|}.$$

Per ogni $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} u D_h v\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} D_{-h} u v\,dx. \tag{3.1}$$

Infatti, usando il cambiamento di variabili $y = x - h$ si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{|h|}\,dx &= \frac{1}{|h|}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} u(y-h)v(y)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x)\,dx\Big) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x-h)-u(x)}{|h|}v(x)\,dx.\end{aligned}$$

Gli operatori di traslazione *commutano* con le derivate deboli, ovvero per ogni $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si ha $T_h u, D_h u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ con

$$\nabla(T_h u) = T_h(\nabla u),\ \nabla(D_h u) = D_h(\nabla u).$$

Inoltre, se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, si ha per ogni $i \in \{1, \dots N\}$

$$\lim_{t\to 0^+} D_{te_i} u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Mediante le traslazioni, possiamo caratterizzare $H^1(\mathbb{R}^N)$ come sottospazio di $L^2(\mathbb{R}^N)$:

Lemma 3.1. *Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$:*

(*i*) *se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, allora per ogni $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si ha $D_h u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\|D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|\nabla u\|_2$;*

(*ii*) *se esiste $C > 0$ t.c. per ogni $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si ha $D_h u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\|D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C$, allora $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e si può porre $C = \|\nabla u\|_2$.*

Dimostrazione. Proviamo (*i*). Supponiamo dapprima che $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Fissati $x \in \mathbb{R}^N$, $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, poniamo per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = u(x+th),$$

così che $g \in C^1(\mathbb{R})$ con $g'(t) = \nabla u(x+th) \cdot h$. Si ha

$$|u(x+h) - u(x)| = \Big|\int_0^1 g'(t)\,dt\Big| \leqslant |h|\int_0^1 |\nabla u(x+th)|\,dt.$$

[2] Usiamo la convenzione $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Inoltre, in questa sezione indicheremo la norma di uno spazio X con $\|\cdot\|_X$.

Usando la diseguaglianza precedente, la diseguaglianza di Jensen [2, p. 120], e il Teorema di Fubini otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} D_h u(x)^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x+h)-u(x)|^2}{|h|^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\int_0^1 |\nabla u(x+th)\,dt\Big)^2\,dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^1 |\nabla u(x+th)|^2\,dt\,dx = \int_0^1\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x+th)|^2\,dx\,dt \\ &= \int_0^1 \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,dt = \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Sia ora $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Per i teoremi di densità visti in [9], esiste una successione (u_n) in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c. $u_n \to u$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_h u_n^2\,dx \leqslant \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Passando al limite per $n \to \infty$, ricaviamo $\|D_h u\|_2 \leqslant \|\nabla u\|_2$.
Proviamo ora (*ii*). Fissiamo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $i \in \{1,\dots N\}$ e poniamo $h = te_i$. Da (*ii*), (3.1) e dalla Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz segue

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^N} uD_h\varphi\,dx\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^N} D_{-h}u\varphi\,dx\Big| \\ &\leqslant \|D_{-h}u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Passando al limite per $t \to 0$, si ha

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx\Big| \leqslant C\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Per la caratterizzazione di $H^1(\mathbb{R}^N)$ vista in [9], si ha $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. A questo punto, da (*i*) segue che possiamo porre $C = \|\nabla u\|_2$. □

Diamo ora inizio alla teoria della regolarità per il problema (1.3), cominciando dal caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ (ricordiamo che $H^1(\mathbb{R}^N) = H_0^1(\mathbb{R}^N)$, ved. [9]). In questo caso, ovviamente, la regolarità della frontiera non è da considerarsi:

Teorema 3.2. *Siano $m \in \mathbb{N}$, $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ soluzione debole di*

$$-\Delta u + u = f(x) \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

Allora $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$, inoltre esiste $C > 0$ (indipendente da f) t.c.

$$\|u\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}.$$

Dimostrazione. Si ha per ogni $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\cdot\nabla\varphi + u\varphi)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi\,dx. \tag{3.2}$$

Ponendo $\varphi = u$ in (3.2) otteniamo

$$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

da cui $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$. Per stimare le derivate di ordine superiore procediamo per induzione su $m \in \mathbb{N}$:

(*a*) Per $m = 0$, supponiamo $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e dimostriamo che $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Fissato $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, scegliamo $\varphi = D_{-h}(D_h u) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ in (3.2):

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u \cdot \nabla D_{-h}(D_h u) + u D_{-h}(D_h u)\big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f D_{-h}(D_h u)\, dx.$$

Applicando (3.1) al primo membro abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big(\nabla u \cdot \nabla D_{-h}(D_h u) + u D_{-h}(D_h u)\big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla D_h u|^2 + |D_h u|^2)\, dx = \|D_h u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

D'altra parte, per il Lemma 3.1 *(i)* si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f D_{-h}(D_h u)\, dx &\leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|D_{-h}(D_h u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\nabla D_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Dunque, concatenando queste relazioni e semplificando $\|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, otteniamo

$$\|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Fissato $i \in \{1, \dots N\}$, si ha in particolare

$$\Big\| D_h\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Per il Lemma 3.1 *(ii)* abbiamo $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ con

$$\Big\|\nabla\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Ne segue $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$, e inoltre

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} = \Big(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \sum_{i=1}^N \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \sum_{j,k=1}^N \Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

con $C > 0$ dipendente solo da N[3].

(*b*) Per $m > 0$, supponiamo la tesi vera per $m - 1$ e dimostriamola per m. Sia dunque $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$. Per il caso (*a*) abbiamo almeno $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Fissiamo $i \in \{1, \dots N\}$ e dimostriamo che $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ è soluzione debole dell'equazione

$$-\Delta\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \text{ in } \mathbb{R}^N. \tag{3.3}$$

Infatti, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, scegliamo $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ come funzione test in (3.2):

$$\int_{R^N} \Big(\nabla u \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx.$$

Per definizione di derivata debole (ved. [9])

$$\int_{R^N} \Big(\nabla u \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \nabla \varphi + \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\Big)\, dx,$$

e similmente

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\, dx.$$

[3]In questa sezione, $C > 0$ denoterà diverse costanti, tutte dipendenti solo dal dominio e indipendenti dal termine noto delle varie equazioni.

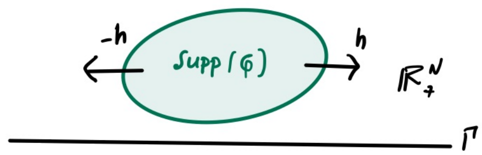

Figura 1.

Concatenando e cambiano segno, abbiamo
$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\nabla\varphi+\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\Big)\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\,dx,$$
ovvero (3.3) (in forma debole). Poiché $\frac{\partial f}{\partial x_i}\in H^{m-1}(\mathbb{R}^N)$, dall'ipotesi induttiva segue $\frac{\partial u}{\partial x_i}\in H^{m+1}(\mathbb{R}^N)$, con la stima
$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{H^{m+1}(\mathbb{R}^N)}\leqslant C\Big\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^N)}.$$
Dunque $u\in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$, e richiamando tutte le diseguaglianze precedenti abbiamo
$$\|u\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}^N)}\leqslant C\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}.$$
Per induzione, la tesi è provata per ogni $m\in\mathbb{N}$. □

Consideriamo ora il semispazio illimitato
$$\mathbb{R}^N_+=\big\{(x',x_N)\in\mathbb{R}^N:\,x_N>0\big\},$$
con frontiera
$$\Gamma=\big\{(x',0):\,x'\in\mathbb{R}^{N-1}\big\}.$$
Come vedremo, in questo caso occorre distinguere fra la derivazione (in senso debole) rispetto alle variabili $x_1,\dots x_{N-1}$ parallele a Γ e quella rispetto a x_N ortogonale a Γ. Osserviamo che, fissato un vettore $h=(h_1,\dots h_{N-1},0)\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ (parallelo a Γ), per ogni $\varphi\in C^\infty_c(\mathbb{R}^N_+)$ si ha $\mathrm{supp}(\varphi)\pm h\subset\mathbb{R}^N_+$ (fig. 1), da cui $D_h\varphi\in C^\infty_c(\mathbb{R}^N_+)$. Riportiamo il seguente lemma tecnico, analogo al Lemma 3.1:

Lemma 3.3. *Siano $u\in H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$, $h=(h_1,\dots h_{N-1},0)\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$. Allora $D_hu\in H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$ e*
$$\|D_hu\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Studiamo ora la regolarità delle soluzioni deboli di (1.3) con $\Omega=\mathbb{R}^N_+$:

Teorema 3.4. *Siano $m\in\mathbb{N}$, $f\in H^m(\mathbb{R}^N_+)$, $u\in H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$ soluzione debole di*
$$\begin{cases}-\Delta u+u=f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N_+\\ u=0 & \text{su } \Gamma.\end{cases}$$
Allora $u\in H^{m+2}(\mathbb{R}^N_+)$, inoltre esiste $C>0$ (indipendente da f) t.c.
$$\|u\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant C\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Dimostrazione. Per ogni $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^N_+)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N_+} f\varphi\, dx, \tag{3.4}$$

da cui come nel caso precedente ricaviamo

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Denotiamo $\{e_1, \dots e_N\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^N$, e procediamo per induzione su $m \in \mathbb{N}$:

(a) Per $m = 0$, supponiamo $f \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ e dimostriamo che $u \in H^2(\mathbb{R}^N_+)$. Fissiamo $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ parallelo a Γ. Per il Lemma 3.3 abbiamo $D_{-h}(D_h u) \in H_0^1(\mathbb{R}^N_+)$, dunque poniamo $\varphi = D_{-h}(D_h u)$ in (3.4):

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \big(\nabla u \cdot \nabla(D_{-h}(D_h u)) + uD_{-h}(D_h u)\big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N_+} fD_{-h}(D_h u)\, dx.$$

Per (3.1) abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \big(\nabla u \cdot \nabla(D_{-h}(D_h u)) + uD_{-h}(D_h u)\big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N_+} (|\nabla(D_h u)|^2 + |D_h u|^2)\, dx = \|D_h u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N_+)},$$

mentre dal Lemma 3.1 (i) segue

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} fD_{-h}(D_h u)\, dx \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} \|D_{-h}(D_h u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} \|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Concatenando queste relazioni e semplificando, abbiamo

$$\|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)}. \tag{3.5}$$

Fissiamo $i \in \{1, \dots N-1\}$, $j \in \{1, \dots N\}$. Posto $h = te_i$ ($t > 0$), per (3.1) e (3.5), si ha per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N_+)$

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\mathbb{R}^N_+} uD_{-h}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\Big)\, dx\Big| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^N_+} D_h\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)\varphi\, dx\Big| \\ &\leqslant \|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)}. \end{aligned}$$

Passando al limite per $t \to 0^+$, si ha

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^N_+} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\, dx\Big| \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)},$$

dunque esiste la derivata debole $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ con

$$\Big\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \Big\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)}. \tag{3.6}$$

Infine, consideriamo il caso $i = j = N$. Da (3.4) si ha per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N_+)$

$$-\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N_+} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}\, dx + \int_{\mathbb{R}^N_+} u\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^N_+} f\varphi\, dx.$$

Sfruttando (3.6) e ricordando che $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)}$, si ha

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_N^2}\,dx\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^N_+}(f-u)\varphi\,dx + \sum_{i=1}^{N-1}\int_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\,dx\Big| \\ &\leqslant \big(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)}\big)\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} + \sum_{i=1}^{N-1}\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} \\ &\leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)}.\end{aligned}$$

Pertanto (3.6) vale anche per $i = j = N$. Concludiamo che $u \in H^2(\mathbb{R}^N_+)$ con

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)},$$

con $C > 0$ indipendente da f.

(b) Per $m > 0$, supponiamo la tesi vera fino all'ordine $m-1$. Assumiamo quindi $f \in H^m(\mathbb{R}^N_+)$. Si ha in particolare $f \in H^{m-1}(\mathbb{R}^N_+)$, da cui per l'ipotesi induttiva segue $u \in H^{m+1}(\mathbb{R}^N_+)$ con

$$\|u\|_{H^{m+1}(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant C\|f\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Per ottenere la tesi, dimostreremo che le derivate seconde di u appartengono a $H^m(\mathbb{R}^N_+)$, con opportune stime delle norme.

Fissiamo dapprima $i \in \{1, \dots N-1\}$. Poiché $m+1 \geqslant 2$, si ha $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}^N_+)$. Inoltre, per ogni $t > 0$, dal Lemma 3.3 (con $h = te_i$ parallelo a Γ) segue $D_{te_i}u \in H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$ e

$$\|D_{te_i}u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Dunque la famiglia $(D_{te_i}u)_{t>0}$ è limitata in $H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$. Poiché $H^1_0(\mathbb{R}^N)$ è riflessivo e $H^1_0(\mathbb{R}^N_+) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N_+)$ (ved. [9]), esiste $v \in H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$ t.c. $D_{te_i}u \rightharpoonup v$ in $H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$ e in $L^2(\mathbb{R}^N_+)$, per $t \to 0^+$. Per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N_+)$, $t > 0$ si ha da (3.1)

$$\int_{\mathbb{R}^N_+}(D_{te_i}u)\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N_+} uD_{-te_i}\varphi\,dx,$$

da cui passando al limite per $t \to 0^+$

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} v\varphi\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx.$$

Per definizione di derivata debole, si ha

$$v = \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1_0(\mathbb{R}^N_+).$$

Proviamo ora che v è soluzione debole di

$$\begin{cases} -\Delta v + v = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ v = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases} \tag{3.7}$$

Infatti, per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N_+)$, scegliendo $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N_+)$ come funzione test in (3.4), si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N_+}\Big(\nabla v\cdot\nabla\varphi + v\varphi\Big)\,dx &= -\int_{\mathbb{R}^N_+}\Big(\nabla u\cdot\nabla\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big) + u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big)\,dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N_+} f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N_+}\frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\,dx,\end{aligned}$$

che è la formulazione debole di (3.7). Osserviamo che $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\mathbb{R}^N_+)$, dunque per l'ipotesi induttiva si ha $v \in H^{m+1}(\mathbb{R}^N_+)$ con

$$\|v\|_{H^{m+1}(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant C\Big\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant C\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N_+)}.$$

In particolare, dai passaggi svolti fin qui abbiamo per ogni $i \in \{1,\dots N-1\}$, $j \in \{1,\dots N\}$

$$\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big\|_{H^m(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant C\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Rimane da esaminare la derivata $\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$. Da (3.4), ricordando che $u \in H^2(\mathbb{R}^N_+)$, segue per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N_+)$

$$-\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\varphi\,dx + \int_{\mathbb{R}^N_+} u\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N_+} f\varphi\,dx,$$

ovvero si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} = -\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u - f \in H^m(\mathbb{R}^N_+).$$

Applicando le stime precedenti abbiamo

$$\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\Big\|_{H^m(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant C\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Concludiamo che $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N_+)$ con

$$\|u\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant C\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N_+)},$$

con $C > 0$ indipendente da f.

Per induzione, la tesi è provata per ogni $m \in \mathbb{N}$. □

Consideriamo ora un dominio Ω regolare, con frontiera limitata Γ. La difficoltà di questo caso è dovuta al fatto che non conosciamo la forma di Γ: la affronteremo 'rettificando' Γ, ovvero riconducendo mediante opportune trasformazioni il problema in esame a casi più semplici, nei quali potremo avvalerci dei risultati precedenti.

Teorema 3.5. *Siano $m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio di classe C^{m+2} t.c. $\Gamma = \partial\Omega$ è limitata, $f \in H^m(\Omega)$, $u \in H^1_0(\Omega)$ soluzione debole di (1.3). Allora $u \in H^{m+2}(\Omega)$, inoltre esiste $C > 0$ (indipendente da f) t.c.*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Per semplicità ci limiteremo al caso in cui Ω è limitato e $m = 0$, ovvero $f \in L^2(\Omega)$, Γ di classe C^2. Vogliamo dimostrare che $u \in H^2(\Omega)$, e che esiste $C > 0$ (dipendente solo da Ω) t.c.

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Per ipotesi, si ha per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\varphi + u\varphi)\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx. \tag{3.8}$$

Ragionando come nel Teorema 3.2 ricaviamo

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

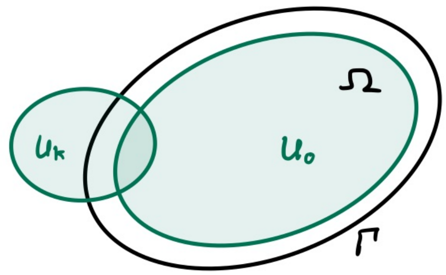

FIGURA 2.

Introduciamo un ricoprimento dell'insieme compatto $\overline{\Omega}$ operando come in [9] (fig. 2). Esistono $p \in \mathbb{N}$, $U_0, \dots U_p \subset \mathbb{R}^N$ aperti limitati t.c.

$$U_0 \subset \Omega,\ \Gamma \subset \bigcup_{k=1}^{p} U_k,\ \overline{\Omega} \subset \bigcup_{k=0}^{p} U_k.$$

Per la regolarità di Γ, prendendo se necessario gli insiemi U_k più piccoli, per ogni $k \in \{1, \dots p\}$ possiamo trovare un diffeomorfismo $H_k \in C^2(\overline{Q}, \overline{U}_k)$ t.c. $H_k^{-1} \in C^2(\overline{U}_k, \overline{Q})$ e si ha

$$H_k(Q_+) = U_k \cap \Omega,\ H_k(Q_0) = U_k \cap \Gamma.$$

Per il Lemma di partizione dell'unità [2, Lemma 9.3] esistono $\theta_0, \dots \theta_p \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c. per ogni $k \in \{0, \dots p\}$ si ha $\mathrm{supp}(\theta_k) \subset U_k$, $0 \leqslant \theta_k(x) \leqslant 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, e per ogni $x \in \overline{\Omega}$

$$\sum_{k=0}^{p} \theta_k(x) = 1.$$

Proviamo ora che $\theta_0 u \in H^2(\Omega)$ (stime interne) e $\theta_k u \in H^2(\Omega)$ per $k = 1, \dots p$ (stime alla frontiera):

(a) Si ha $\theta_0 u \in H^1(U_0)$ e $\mathrm{supp}(\theta_0 u) \subset U_0$, dunque per i risultati di [9] possiamo definire $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ ponendo per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$v(x) = \begin{cases} \theta_0(x)u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \Omega^c. \end{cases}$$

Poniamo anche per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$g(x) = \begin{cases} \theta_0(x)f(x) - 2\nabla\theta_0(x) \cdot \nabla u(x) - \Delta\theta_0(x)u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \Omega^c. \end{cases}$$

Dimostreremo ora che $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ è soluzione debole dell'equazione

$$-\Delta v + v = g(x) \text{ in } \mathbb{R}^N. \tag{3.9}$$

Fissiamo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Allora si ha $\theta_0\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, così, scegliendo questa funzione come test in (3.8), otteniamo

$$\int_\Omega \Big[\nabla u \cdot \nabla(\theta_0\varphi) + u(\theta_0\varphi)\Big]\, dx = \int_\Omega f(\theta_0\varphi)\, dx.$$

L'eguaglianza precedente si riformula come segue:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\theta_0\, dx + \int_\Omega (\theta_0 u)\varphi\, dx = \int_\Omega (\theta_0 f)\varphi\, dx - \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \theta_0}{\partial x_i}\,\varphi\, dx.$$

Ora usiamo φ come funzione test in (3.9) e applichiamo la relazione precedente, insieme alla formula di Gauß-Green (ved. [9]) sul dominio Ω:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\big[\nabla v\cdot\nabla\varphi+v\varphi\big]\,dx &= \sum_{i=1}^N\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_0 u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx+\int_\Omega(\theta_0 u)\varphi\,dx\\
&=\sum_{i=1}^N\int_\Omega\frac{\partial\theta_0}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,u\,dx+\Big[\sum_{i=1}^N\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\theta_0\,dx+\int_\Omega(\theta_0 u)\varphi\,dx\Big]\\
&=\sum_{i=1}^N\int_\Omega\frac{\partial\theta_0}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(u\varphi)\,dx-\sum_{i=1}^N\int_\Omega\frac{\partial\theta_0}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\varphi\,dx\\
&+\Big[\int_\Omega(\theta_0 f)\varphi\,dx-\sum_{i=1}^N\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\theta_0}{\partial x_i}\,\varphi\,dx\Big]\\
&=-\sum_{i=1}^N\int_\Omega\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x_i^2}\,u\varphi\,dx+\int_\Omega(\theta_0 f)\varphi\,dx-2\sum_{i=1}^N\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\theta_0}{\partial x_i}\,\varphi\,dx\\
&=\int_\Omega\big[\theta_0 f-2\nabla\theta_0\cdot\nabla u-\Delta\theta_0 u\big]\varphi\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}g\varphi\,dx.\end{aligned}$$

Dunque v risolve (3.9). D'altra parte, poiché $\theta_0,\nabla\theta_0,\Delta\theta_0\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (con norme indipendenti da f), per costruzione si ha $g\in L^2(\mathbb{R}^N)$ e

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}&=\Big\|\theta_0 f-2\nabla\theta_0\cdot\nabla u-\Delta\theta_0 u\Big\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant\|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)}+2\|\nabla\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\Delta\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant C\big(\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|u\|_{H^1(\Omega)}\big)\leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Applicando il Teorema 3.2 all'equazione (3.9), si ha $v\in H^2(\mathbb{R}^N)$ ed esiste $C>0$ indipendente da g (e quindi da f) t.c.

$$\|v\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}\leqslant C\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Pertanto, $\theta_0 u\in H^2(\Omega)$ con

$$\|\theta_0 u\|_{H^2(\Omega)}=\|v\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}\leqslant C\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

(*b*) Fissiamo $k\in\{1,\dots p\}$. Poniamo stavolta per ogni $x\in\Omega\cap U_k$

$$v(x)=\theta_k(x)u(x)$$

e similmente

$$g(x)=\theta_k(x)f(x)-\theta_k(x)u(x)-2\nabla\theta_k(x)\cdot\nabla u(x)-\Delta\theta_k(x)u(x).$$

Ragionando come nel caso (*a*) si vede che $v\in H^1_0(\Omega\cap U_k)$ è soluzione debole del problema

$$\begin{cases}-\Delta v=g(x) & \text{in } \Omega\cap U_k\\ v=0 & \text{su } \partial(\Omega\cap U_k).\end{cases}\tag{3.10}$$

Inoltre, si ha $g\in L^2(\Omega\cap U_k)$ con la stima

$$\|g\|_{L^2(\Omega\cap U_k)}\leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

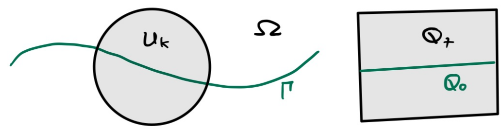

FIGURA 3.

Ora usiamo il cambiamento di variabili $x = H_k(y)$ per 'spostare' (3.10) sul dominio Q_+ (questa tecnica è nota come *rettificazione della frontiera*, ved. fig. 3). Per ogni $y \in \overline{Q}_+$ poniamo $w(y) = v(H_k(y))$, inoltre poniamo

$$\tilde{g} = (g \circ H_k)|\det(J_{H_k})| \in L^2(Q_+),$$

e per ogni $j, l \in \{1, \dots N\}$

$$a_{jl} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial H_{k,j}^{-1}}{\partial x_i} \frac{\partial H_{k,l}^{-1}}{\partial x_i} |\det(J_{H_k})| \in C^1(\overline{Q}_+)\text{[4]}.$$

Proviamo ora che $w \in H_0^1(Q_+)$ è soluzione debole del seguente problema di Dirichlet sul dominio Q_+:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{j,l=1}^{N} a_{jl}(y) \frac{\partial^2 w}{\partial y_j \partial y_l} = \tilde{g}(y) & \text{in } Q_+ \\ w = 0 & \text{su } \partial Q_+. \end{cases} \tag{3.11}$$

Infatti, fissiamo $\psi \in C_c^\infty(Q_+)$. Allora si ha $\varphi = \psi \circ H_k^{-1} \in H_0^1(\Omega \cap U_k)$. Usando φ come funzione test in (3.10) abbiamo

$$\int_{\Omega \cap U_k} \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega \cap U_k} g \varphi \, dx.$$

Applicando il cambiamento di variabili $x = H_k(y)$ al primo membro otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap U_k} \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx &= \int_{\Omega \cap U_k} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \\ &= \int_{\Omega \cap U_k} \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial w}{\partial y_j} \frac{\partial H_{k,j}^{-1}}{\partial x_i} \Big) \Big(\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial \psi}{\partial y_l} \frac{\partial H_{k,l}^{-1}}{\partial x_i} \Big) \, dx \\ &= \int_{Q_+} \sum_{j,l=1}^{N} \Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial H_{k,j}^{-1}}{\partial x_i} \frac{\partial H_{k,l}^{-1}}{\partial x_i} \Big) \frac{\partial w}{\partial y_k} \frac{\partial \psi}{\partial y_l} \, |\det(J_{H_k})| dy = \int_{Q_+} \sum_{j,l=1}^{N} a_{jl} \frac{\partial w}{\partial y_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_l} \, dy. \end{aligned}$$

D'altra parte si ha

$$\int_{\Omega \cap U_k} g \varphi \, dx = \int_{Q_+} \tilde{g} \psi \, dy.$$

Dunque ricaviamo

$$\sum_{j,l=1}^{N} \int_{Q_+} a_{jl} \frac{\partial w}{\partial y_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_l} \, dy = \int_{Q_+} \tilde{g} \psi \, dy,$$

[4] $H_{k,j}^{-1}$ denota la j-ma componente del vettore H_k^{-1}, che è calcolato in $x = H_k(y)$.

ovvero w è soluzione debole di (3.11). Esaminiamo adesso i dati del problema (3.11). I coefficienti $(a_{jl})_{j,l=1}^N$ soddisfano la condizione (1.2) di uniforme ellitticità. Infatti, poiché $\det(J_{H_k^{-1}}) \neq 0$ in $\overline{\Omega \cap U_k}$, a meno di un riordinamento delle variabili si ha per ogni $i \in \{1, \dots N\}$ e ogni $x \in \overline{\Omega \cap U_k}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\Big| \sum_{j=1}^N \frac{\partial H_{k,j}^{-1}}{\partial x_i}(x)\xi_j \Big| \geqslant c|\xi_i|,$$

con $c > 0$ indipendente da x. Ricordando che anche $\det(J_{H_k}) \neq 0$ in $\overline{Q}_+$, si ha per ogni $y \in \overline{Q}_+$, $x = H_k(y)$, $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}\sum_{j,l=1}^N a_{jl}(y)\xi_j\xi_l &= \sum_{j,l=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{\partial H_{k,j}^{-1}}{\partial x_i}(x) \frac{\partial H_{k,l}^{-1}}{\partial x_i}(x) |\det(J_{H_k}(y))| \xi_j \xi_k \\ &= |\det(J_{H_k}(y))| \sum_{i=1}^N \Big(\sum_{j=1}^N \frac{\partial H_{k,j}^{-1}}{\partial x_i}(x)\xi_j \Big) \Big(\sum_{l=1}^N \frac{\partial H_{k,l}^{-1}}{\partial x_i}(x)\xi_l \Big).\end{aligned}$$

Dunque esiste $\alpha > 0$ dipendente solo da H_k t.c. per ogni $y \in \overline{Q}_+$, $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{j,l=1}^N a_{jl}(y)\xi_j\xi_l \geqslant \alpha|\xi|^2.$$

D'altra parte, ovviamente esiste $C > 0$ (indipendente da f) t.c.

$$\|\tilde{g}\|_{L^2(Q_+)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Usiamo $w \in H_0^1(Q_+)$ come funzione test in (3.11), applicando anche le relazioni ora trovate:

$$\begin{aligned}\alpha\|\nabla w\|_{L^2(Q_+)}^2 &\leqslant \int_{Q_+} \sum_{j,l=1}^N a_{jl} \frac{\partial w}{\partial y_j} \frac{\partial w}{\partial y_l}\, dy = \int_{Q_+} \tilde{g} w\, dy \\ &\leqslant \|\tilde{g}\|_{L^2(Q_+)} \|w\|_{L^2(Q_+)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(Q_+)}\end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo usato la Diseguaglianza di Poincaré, ved. [9]). Semplificando otteniamo

$$\|\nabla w\|_{L^2(Q_+)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ancora per la Diseguaglianza di Poincaré si ha

$$\|w\|_{H^1(Q_+)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Consideriamo ora le derivate seconde di w, applicando una variante del metodo usato nel Teorema 3.4. Fissiamo dapprima $i \in \{1, \dots N-1\}$, $j \in \{1, \dots N\}$, e poniamo $h = te_i$ $(t > 0)$. Poiché $\mathrm{supp}(w) \Subset Q_+$, per $t > 0$ abbastanza piccolo si ha $\mathrm{supp}(w) \pm h \subset Q_+$. Pertanto possiamo porre $\psi = D_{-h}(D_h w) \in H_0^1(Q_+)$ e usare questa funzione come test in (3.11):

$$\int_{Q_+} \sum_{j,l=1}^N a_{jl} \frac{\partial w}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_l}(D_{-h}(D_h w))\, dy = \int_{Q_+} \tilde{g} D_{-h}(D_h w)\, dy.$$

Operiamo sul primo membro, applicando la commutazione fra operatori di traslazione e derivate deboli, la condizione di uniforme ellitticità e la Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\int_{Q_+}\sum_{j,l=1}^{N} a_{jl}\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_l}(D_{-h}(D_h w))\,dy &= \int_{Q_+}\sum_{j,l=1}^{N} D_h\Big(a_{jl}\frac{\partial w}{\partial y_j}\Big)\frac{\partial D_h w}{\partial y_l}\,dy \\ &= \int_{Q_+}\sum_{j,l=1}^{N}\Big[T_h a_{jl}\frac{\partial D_h w}{\partial y_j}\frac{\partial D_h w}{\partial y_l} + D_h a_{jl}\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial D_h w}{\partial y_l}\Big]\,dy \\ &\geqslant \alpha\int_{Q_+}|\nabla D_h w|^2\,dy - C\int_{Q_+}|\nabla w||\nabla D_h w|\,dy \\ &\geqslant \alpha\|\nabla D_h w\|^2_{L^2(Q_+)} - C\|\nabla w\|_{L^2(Q_+)}\|\nabla D_h w\|_{L^2(Q_+)}.\end{aligned}$$

Operiamo ora sul secondo membro, applicando nuovamente la Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz e il Lemma 3.3:

$$\begin{aligned}\int_{Q_+}\tilde g D_{-h}(D_h w)\,dy &\leqslant \|\tilde g\|_{L^2(Q_+)}\|D_{-h}(D_h w)\|_{L^2(Q_+)} \\ &\leqslant \|\tilde g\|_{L^2(Q_+)}\|\nabla D_h w\|_{L^2(Q_+)}.\end{aligned}$$

Dal confronto fra le diseguaglianze precedenti segue

$$\alpha\|\nabla D_h w\|^2_{L^2(Q_+)} \leqslant C\|\nabla w\|_{L^2(Q_+)}\|\nabla D_h w\|_{L^2(Q_+)} + \|\tilde g\|_{L^2(Q_+)}\|\nabla D_h w\|_{L^2(Q_+)},$$

da cui ancora

$$\|\nabla D_h w\|_{L^2(Q_+)} \leqslant C\|w\|_{H^1(Q_+)} + \|\tilde g\|_{L^2(Q_+)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Passando al limite per $t \to 0^+$ e ragionando come nel Teorema 3.4, si ha per ogni $j \in \{1, \dots N-1\}$, $l \in \{1, \dots N\}$

$$\Big\|\frac{\partial^2 w}{\partial y_j \partial y_l}\Big\|_{L^2(Q_+)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Rimane da esaminare il caso $j = l = N$. Preliminarmente osserviamo che, per uniforme ellitticità, si ha $a_{NN} \geqslant \alpha$ in Q_+. Fissiamo ora $\psi \in C^\infty_c(Q_+)$. Usiamo la funzione

$$\frac{\psi}{a_{NN}} \in C^1_c(Q_+)$$

come test in (3.11), ottenendo

$$\int_{Q_+} a_{NN}\frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial}{\partial y_N}\Big(\frac{\psi}{a_{NN}}\Big)\,dy = -\sum_{(j,l)\neq(N,N)}\int_{Q_+} a_{jl}\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\frac{\psi}{a_{NN}}\Big)\,dy + \int_{Q_+}\tilde g\frac{\psi}{a_{NN}}\,dy.$$

Operiamo sul primo membro, applicando le regole di calcolo sulle derivate deboli e la Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\int_{Q_+} a_{NN}\frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial}{\partial y_N}\Big(\frac{\psi}{a_{NN}}\Big)\,dy &= \int_{Q_+}\frac{\partial w}{\partial y_N}\Big(\frac{\partial \psi}{\partial y_N} - \frac{\psi}{a_{NN}}\frac{\partial a_{NN}}{\partial y_N}\Big)\,dy \\ &= \int_{Q_+}\frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial \psi}{\partial y_N}\,dy - \int_{Q_+}\frac{1}{a_{NN}}\frac{\partial a_{NN}}{\partial y_N}\frac{\partial w}{\partial y_N}\psi\,dy \\ &\geqslant \int_{Q_+}\frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial \psi}{\partial y_N}\,dy - C\|\nabla w\|_{L^2(Q_+)}\|\psi\|_{L^2(Q_+)}.\end{aligned}$$

Operiamo ora sul secondo membro della relazione sopra, applicando le stime precedenti:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{(j,l)\neq(N,N)}\int_{Q_+} a_{jl}\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\frac{\psi}{a_{NN}}\Big)\,dy+\int_{Q_+}\tilde g\frac{\psi}{a_{NN}}\,dy\\
&=\sum_{(j,l)\neq(N,N)}\int_{Q_+} a_{jl}\frac{\partial^2 w}{\partial y_j\partial y_l}\frac{\psi}{a_{NN}}+\int_{Q_+}\tilde g\frac{\psi}{a_{NN}}\,dy\\
&\leqslant C\Big(\sum_{(j,l)\neq(N,N)}\Big\|\frac{\partial^2 w}{\partial y_j\partial y_l}\Big\|_{L^2(Q_+)}+\|\tilde g\|_{L^2(Q_+)}\Big)\|\psi\|_{L^2(Q_+)}\leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{L^2(Q_+)}.
\end{aligned}$$

Dalle relazioni fin qui acquisite segue

$$\begin{aligned}
\int_{Q_+}\frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial\psi}{\partial y_N}\,dy &\leqslant C\|\nabla w\|_{L^2(Q_+)}\|\psi\|_{L^2(Q_+)}+C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{L^2(Q_+)}\\
&\leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{L^2(Q_+)}.
\end{aligned}$$

Dunque abbiamo

$$\Big\|\frac{\partial^2 w}{\partial y_N^2}\Big\|_{L^2(Q_+)}\leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

che insieme alle stime precedenti implica $w\in H^2(Q_+)$ con

$$\|w\|_{H^2(Q_+)}\leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Per le proprietà di H_k, abbiamo infine $\theta_k u\in H^2(\Omega)$ con

$$\|\theta_k u\|_{H^2(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ricordiamo che si ha in Ω

$$u=\sum_{k=0}^{p}\theta_k u.$$

Da (a), (b) deduciamo $u\in H^2(\Omega)$ con

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Per dimostrare i casi $m>0$ si procede per induzione su m come nel Teorema 3.4, usando ad ogni passo un opportuno cambiamento di variabili per rettificare la frontiera (omettiamo questa parte perché eccessivamente tecnica). □

Osservazione 3.6. Nella dimostrazione del Teorema 3.5, abbiamo provato *en passant* la regolarità del secondo ordine per le soluzioni deboli del problema (3.11). Ovviamente, questo risultato si estende a equazioni ellittiche più generali, ovvero: siano $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un dominio limitato di classe C^2, $f\in L^2(\Omega)$, e $a_{ij}\in C^1(\overline{\Omega})$ verificanti (1.2). Allora per ogni soluzione debole del problema

$$\begin{cases}-\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=f(x) & \text{in }\Omega\\ u=0 & \text{su }\Gamma\end{cases}$$

si ha $u\in H^2(\Omega)$.

Se i dati del problema (1.3) sono abbastanza regolari, si può invertire la Proposizione 1.3, completando così il programma della Sezione 1:

Teorema 3.7. *Siano $m>\frac{N}{2}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ soddisfacente una delle seguenti condizioni:*

(i) $\Omega=\mathbb{R}^N$;
(ii) $\Omega=\mathbb{R}^N_+$;

(iii) Ω è un dominio di classe C^{m+2} t.c. $\Gamma = \partial\Omega$ è limitata,

e siano inoltre $f \in H^m(\Omega)$, $u \in H^1_0(\Omega)$ soluzione debole di (1.3). Allora $u \in C^2(\overline{\Omega})$ è soluzione classica di (1.3).

Dimostrazione. Consideriamo solo il caso *(iii)* (gli altri sono simili). Per i Teoremi di immersione di Sobolev (ved. [9] e [2, Corollaries 9.13, 9.15]) si ha $f \in C(\overline{\Omega})$. Analogamente, per il Teorema 3.5, si ha $u \in H^{m+2}(\Omega)$ da cui $u \in C^k(\overline{\Omega})$, con

$$k = \Big[m + 2 - \frac{N}{2}\Big] \geqslant 2,$$

in particolare $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Dunque, per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$, dalla formulazione debole di (1.3) e dalla formula di Gauß-Green segue

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Poiché φ è arbitraria, per ogni $x \in \Omega$ si ha

$$-\Delta u(x) + u(x) = f(x).$$

Inoltre, $u \in H^1_0(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, da cui segue per ogni $x \in \Gamma$

$$u(x) = 0$$

(ved. [9]). Pertanto, u verifica la Definizione 1.1. □

Osservazione 3.8. Un aspetto sorprendente di questa teoria è che, benché nell'equazione del problema (1.3) compaiano solo le derivate seconde *pure* della funzione incognita u, si ottiene la regolarità di *tutte* le derivate seconde di u.

Esercizio 3.9. Dimostrare che gli operatori T_h, D_h ($h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$) commutano con le derivate deboli in $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Esercizio 3.10. Dimostrare il Lemma 3.3.

Esercizio 3.11. Dimostrare l'Osservazione 3.6.

Esercizio 3.12. Dimostrare il Teorema 3.7 nei casi *(i)*, *(ii)*.

4. Altre EDP ellittiche

In questa sezione prendiamo in esame problemi ai valori al contorno diversi da (1.3), svolgendo per essi la teoria dell'esistenza e unicità della soluzione debole. La teoria della regolarità è simile a quella esposta nella Sezione 3, pertanto la omettiamo. Per semplicità supporremo sempre $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato con frontiera $\Gamma = \partial\Omega$ di classe C^1. Inoltre, non indicheremo la definizione di *soluzione classica* per i problemi seguenti, che è analoga alla Definizione 1.1.

Consideriamo l'*equazione di Poisson con condizione di Dirichlet omogenea*:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases} \tag{4.1}$$

con $f \in L^2(\Omega)$. Una soluzione debole di (4.1) è una funzione $u \in H^1_0(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Questo problema si tratta analogamente a (1.3):

Teorema 4.1. *Siano Ω un dominio regolare limitato, $f \in L^2(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ di (4.1). Inoltre, posto*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega fu\,dx,$$

si ha

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v).$$

Dimostrazione. Sullo spazio $H_0^1(\Omega)$ adottiamo la norma equivalente $\|u\| = \|\nabla u\|_2$[5] (Diseguaglianza di Poincaré, ved. [9]), quindi procediamo come nel Teorema 2.1. □

Consideriamo ora un *problema di Dirichlet non omogeneo*:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = g(x) & \text{su } \Gamma, \end{cases} \tag{4.2}$$

con $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Poniamo

$$K = \big\{u + g : \ u \in H_0^1(\Omega)\big\}.$$

Una soluzione debole di (4.2) è una funzione $u \in K$ t.c. per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\varphi + u\varphi)\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx.$$

Si vede facilmente, usando la formula di Gauß-Green, che ogni soluzione classica di (4.2) è una soluzione debole.

Teorema 4.2. *Siano Ω un dominio regolare limitato, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Allora esiste un'unica soluzione debole $u \in K$ di (4.2). Inoltre, posto*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\,dx - \int_\Omega fu\,dx,$$

si ha

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v).$$

Dimostrazione. L'insieme $K \subset H^1(\Omega)$ è chiuso e convesso. Poniamo per ogni $u, v \in H^1(\Omega)$

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\,dx,$$

così che $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ è una forma bilineare continua, coerciva e simmetrica. D'altra parte, il funzionale lineare

$$v \mapsto \int_\Omega fv\,dx$$

è continuo in $H^1(\Omega)$. Per il Teorema di Stampacchia (ved. [8]) esiste un'unica soluzione $u \in K$ che soddisfa per ogni $v \in K$

$$\int_\Omega \big(\nabla u \cdot \nabla(v-u) + u(v-u)\big)\,dx \geqslant \int_\Omega f(v-u)\,dx. \tag{4.3}$$

Fissata $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, scegliamo $v = u \pm \varphi \in K$ come funzioni test in (4.3) e vediamo che u è soluzione debole di (4.2). Viceversa, ogni soluzione debole di (4.2) risolve (4.3), il che prova l'unicità di u. Infine, sempre per il Teorema di Stampacchia (ricordando che a è simmetrica) abbiamo

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v),$$

[5] Torniamo a indicare con $\|\cdot\|_2$ la norma di $L^2(\Omega)$.

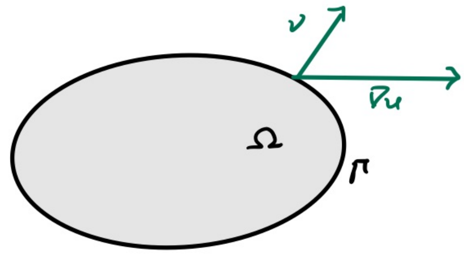

Figura 4.

il che conclude la dimostrazione. □

Osservazione 4.3. Chiaramente il problema (4.2) (così come la sua soluzione) non cambia se sostituiamo la funzione g con un'altra funzione $\tilde{g} \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ t.c. $\tilde{g}(x) = g(x)$ per ogni $x \in \Gamma$. Tuttavia, abbiamo richiesto che il dato di frontiera fosse definito anche in Ω, perché in generale una funzione continua su Γ non ammette un'estensione in $H^1(\Omega)$. Per studiare (4.2) con $g \in L^2(\Gamma)$ (non necessariamente continua) occorre applicare la *teoria delle tracce* (ved. [2, p. 315]).

Consideriamo ora un *problema di Neumann omogeneo*:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x) & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases} \tag{4.4}$$

con $f \in L^2(\Omega)$. Qui $\nu \in \mathbb{R}^N$ denota il versore normale esterno a Γ (fig. 4) e poniamo per ogni $x \in \Gamma$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u(x) \cdot \nu.$$

Una soluzione debole di (4.4) è una funzione $u \in H^1(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi)\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx.$$

Ancora per la formula di Gauß-Green, ogni soluzione classica di (4.4) è una soluzione debole.

Teorema 4.4. *Siano Ω un dominio regolare limitato, $f \in L^2(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole $u \in H^1(\Omega)$ di (4.4). Inoltre, posto*

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\, dx - \int_\Omega fu\, dx,$$

si ha

$$J(u) = \min_{v \in H^1(\Omega)} J(v).$$

Dimostrazione. Si procede come nel Teorema 2.1, sullo spazio $H^1(\Omega)$. □

Consideriamo un'*equazione lineare ellittica generale* (in forma di divergenza), con condizione al contorno di Dirichlet:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases} \tag{4.5}$$

con $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ matrice simmetrica di componenti $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega})$ $(i, j = 1, \dots N)$ soddisfacenti la condizione (1.2) di uniforme ellitticità, e gli altri dati: $b = (b_1, \dots b_N)$ vettore di componenti

$b_h \in C(\overline{\Omega})$ ($h = 1, \dots N$), $c \in C(\overline{\Omega})$ e $f \in L^2(\Omega)$. Una soluzione debole di (4.5) è una funzione $u \in H^1_0(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega \Big[\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \sum_{h=1}^N b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} \varphi + cu\varphi \Big] \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Come al solito, ogni soluzione classica di (4.5) è una soluzione debole. La presenza del termine $b \cdot \nabla u$ rende il problema (4.5) non-variazionale (ovvero, la forma bilineare ad esso associata in $H^1_0(\Omega)$ non è simmetrica né coerciva), pertanto non è possibile applicare ad esso il Teorema di Lax-Milgram. L'esistenza di soluzioni deboli va dimostrata in questo caso con un approccio diverso (ved. [1]):

Teorema 4.5. *Siano Ω, A, b, c come sopra. Allora una sola delle seguenti condizioni è verificata:*

- (*i*) *per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega)$ di (4.5);*
- (*ii*) *esistono $d \in \mathbb{N}_0$, $Y \subset L^2(\Omega)$ sottospazio di dimensione d t.c. per $f = 0$ le soluzioni deboli di (4.5) formano un sottospazio di $H^1_0(\Omega)$ di dimensione d, e per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste una soluzione debole di (4.5) se e solo se*

$$\int_\Omega fv \, dx = 0 \text{ per ogni } v \in Y.$$

Dimostrazione. Poniamo per ogni $u, v \in H^1_0(\Omega)$

$$a(u, v) = \int_\Omega \Big[\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{h=1}^N b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} v + cuv \Big] \, dx.$$

Allora $a : H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ è una forma bilineare continua (non coerciva né simmetrica). Per ogni $\lambda > 0$ definiamo una nuova forma bilineare continua a_λ ponendo

$$a_\lambda(u, v) = a(u, v) + \lambda \int_\Omega uv \, dx.$$

Proviamo che, per $\lambda > 0$ abbastanza grande, a_λ è coerciva. Infatti, per (1.2) e le ipotesi su b, c, esistono $\beta, \gamma > 0$ t.c. per ogni $u \in H^1_0(\Omega)$

$$a(u, u) \geqslant \alpha \|\nabla u\|_2^2 - \beta \|\nabla u\|_2 \|u\|_2 - \gamma \|u\|_2^2,$$

da cui per ogni $\lambda, \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} a_\lambda(u, u) &\geqslant \alpha \|\nabla u\|_2^2 - \beta \|\nabla u\|_2 \|u\|_2 + (\lambda - \gamma) \|u\|_2^2 \\ &\geqslant \alpha \|\nabla u\|_2^2 - \beta \Big(\frac{\varepsilon \|\nabla u\|_2^2}{2} + \frac{\|u\|_2^2}{2\varepsilon} \Big) + (\lambda - \gamma) \|u\|_2^2 \\ &\geqslant \Big(\alpha - \frac{\beta\varepsilon}{2} \Big) \|\nabla u\|_2^2 + \Big(\lambda - \frac{\beta}{2\varepsilon} - \gamma \Big) \|u\|_2^2 \end{aligned}$$

(abbiamo usato la diseguaglianza di Young, ved. [9]). Scelti $\varepsilon < \frac{2\alpha}{\beta}$, $\lambda > \frac{\beta}{2\varepsilon} + \gamma$, si trova una costante $c_\lambda > 0$ t.c. per ogni $u \in H^1_0(\Omega)$

$$a_\lambda(u, u) \geqslant c_\lambda \|u\|^2.$$

Per il Teorema di Lax-Milgram (ved. [8]), per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica $u \in H^1_0(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$a_\lambda(u, \varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Ponendo $A(f) = u$, definiamo un operatore lineare $T \in L(L^2(\Omega))$. Per ogni $f \in L^2(\Omega)$, posto $u = T(f)$ si ha

$$\begin{aligned} c_\lambda \|u\|^2 &\leqslant a_\lambda(u,u) \\ &= \int_\Omega f u \, dx \\ &\leqslant \|u\|_2 \|f\|_2, \end{aligned}$$

da cui $\|u\| \leqslant C\|f\|_2$ (con $C > 0$ indipendente da f). Dunque T è continuo da $L^2(\Omega)$ in $H^1_0(\Omega)$. Ricordando che l'immersione $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ è compatta (ved. [9]), abbiamo $T \in \mathcal{K}(L^2(\Omega))$. Chiaramente, $u \in H^1_0(\Omega)$ è soluzione debole di (4.5) se e solo se

$$u = T(f + \lambda u).$$

Ponendo $v = f + \lambda u$, riformuliamo il problema (4.5) mediante l'equivalente equazione funzionale in $L^2(\Omega)$

$$v - \lambda T(v) = f. \tag{4.6}$$

All'equazione (4.6) applichiamo il Teorema di alternativa di Fredholm (ved. [8]). Poniamo dapprima

$$Y = \ker(I - \lambda T^*) = \mathrm{im}(I - \lambda T)^\perp,$$

sottospazio di $L^2(\Omega)$ di dimensione finita $d \in \mathbb{N}$. Distinguiamo due casi:

(a) Se $d = 0$, $I - \lambda T$ è biunivoco e per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica soluzione $v \in L^2(\Omega)$ di (4.6). Posto $u = \frac{1}{\lambda}(v - f)$, si ha $u \in H^1_0(\Omega)$ (per costruzione dell'operatore T) e questa è l'unica soluzione di (4.5), dunque vale (i).

(b) Se $d > 0$, allora anche il sottospazio $\ker(I - \lambda T)$, formato dalle soluzioni di (4.6) per $f = 0$, ha dimensione d. Inoltre, fissato $f \in L^2(\Omega)$, (4.6) ha soluzione se e solo se $f \in Y^\perp$. Come in (a), la conclusione si riformula per il problema (4.5), provando (ii).

Dunque una sola delle condizioni (i), (ii) è verificata. □

Osservazione 4.6. Se $b = 0$, $c \geqslant 0$, il problema (4.5) diventa variazionale, con funzionale dell'energia associato

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \Big[\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu^2 \Big] dx - \int_\Omega f u \, dx.$$

Esercizio 4.7. Svolgere la teoria della regolarità per i problemi (4.1), (4.4).

5. Il principio del massimo

Le soluzioni di EDP ellittiche si possono 'controllare' mediante i loro valori sulla frontiera e i dati dell'equazione, in quanto esse soddisfano una proprietà generale detta *principio del massimo*. La forma elementare di questa proprietà è riferita alle funzioni *armoniche*: se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ soddisfa per ogni $x \in \Omega$

$$\Delta u(x) = 0,$$

allora si ha

$$\inf_\Omega u = \inf_\Gamma u, \ \sup_\Omega u = \sup_\Gamma u.$$

Dimostriamo il principio del massimo per le soluzioni continue di (4.2):

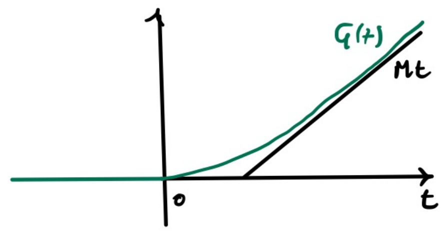

FIGURA 5.

Teorema 5.1. *Siano Ω un dominio regolare limitato, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluzione debole di (4.2). Allora per ogni $x \in \Omega$*

$$\min\Big\{\inf_\Gamma g, \inf_\Omega f\Big\} \leqslant u(x) \leqslant \max\Big\{\sup_\Gamma g, \sup_\Omega f\Big\}$$ [6]

Dimostrazione. Proviamo la stima dall'alto. Sia $G \in C^1(\mathbb{R})$ t.c. $0 < G'(t) \leqslant M$ per ogni $t > 0$ $(M > 0)$, $G(t) = 0$ per ogni $t \leqslant 0$. In particolare si ha $G(t)t > 0$ per ogni $t > 0$ (fig. 5). Poniamo

$$K = \max\Big\{\sup_\Gamma g, \sup_\Omega f\Big\}.$$

Evitando casi banali, possiamo supporre $K < \infty$. Poniamo $v = G \circ (u - K)$ così che $v \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (ved. [9]). In particolare, per ogni $x \in \Gamma$ si ha $u(x) \leqslant K$ da cui

$$v(x) = G(u(x) - K) = 0,$$

pertanto $v \in H^1_0(\Omega)$ (ved. [9]). Poiché u è soluzione debole di (4.2), usando come funzione test v si ha

$$\int_\Omega \big(G'(u-K)|\nabla u|^2 + G(u-K)u\big)\,dx = \int_\Omega fG(u-K)\,dx,$$

da cui

$$\int_\Omega \big(G'(u-K)|\nabla u|^2 + G(u-K)(u-K)\big)\,dx = \int_\Omega (f-K)G(u-K)\,dx \leqslant 0.$$

Da $G' \geqslant 0$, $f \leqslant K$ ricaviamo

$$\int_\Omega G(u-K)(u-K)\,dx \leqslant 0,$$

e poiché l'integranda è non-negativa ne segue $u(x) \leqslant K$ per ogni $x \in \Omega$.
La stima dal basso si prova analogamente. □

Se $g = 0$, dal Teorema 5.1 si ricava:

Corollario 5.2. *Siano Ω un dominio regolare limitato, $f \in L^\infty(\Omega)$, $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluzione debole di (1.3). Allora:*
- *(i)* $\|u\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$;
- *(ii)* *se* $f(x) \geqslant 0$ *per q.o.* $x \in \Omega$, $u(x) \geqslant 0$ *per q.o.* $x \in \Omega$;
- *(iii)* *se* $f(x) \leqslant 0$ *per q.o.* $x \in \Omega$, $u(x) \leqslant 0$ *per q.o.* $x \in \Omega$.

Valgono risultati analoghi per EDP molto più generali, anche non lineari (ved. [5]).

Esercizio 5.3. Dimostrare il Corollario 5.2.

Esercizio 5.4. Dimostrare il principio del massimo per il problema (4.4).

[6] Gli estremi di f sono *essenziali*, ovvero determinati a meno di un insieme di misura nulla.

6. Lo spettro del laplaciano

Questa sezione è dedicata allo studio del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases} \tag{6.1}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un dominio regolare limitato, $\Gamma = \partial\Omega$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ è un parametro. Una soluzione debole di (6.1) è una funzione $u \in H^1_0(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda \int_\Omega u\varphi \, dx.$$

Chiaramente, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ il problema (6.1) ammette la soluzione banale $u = 0$. Siamo dunque interessati ai valori di λ per i quali esistono soluzioni non banali:

Definizione 6.1. *Un autovalore dell'operatore $-\Delta$ in $H^1_0(\Omega)$ è un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. (6.1) ammette almeno una soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}$, detta autofunzione associata a λ. L'insieme degli autovalori di $-\Delta$ è detto spettro e denotato $\sigma(\Omega)$[7].*

Per ogni $\lambda \in \sigma(\Omega)$, l'insieme delle autofunzioni associate a λ è un sottospazio chiuso di $H^1_0(\Omega)$, detto *autospazio* e denotato $E(\lambda)$. Se adottiamo su $H^1_0(\Omega)$ il prodotto scalare 'ridotto' (grazie alla Diseguaglianza di Poincaré, ved. [9]), autofunzioni associate ad autovalori diversi sono ortogonali sia in $H^1_0(\Omega)$ che in $L^2(\Omega)$:

Lemma 6.2. *Siano Ω un dominio regolare limitato, $\lambda, \mu \in \sigma(\Omega)$, $\lambda \neq \mu$, $u \in E(\lambda)$, $v \in E(\mu)$. Allora*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega uv \, dx = 0.$$

Dimostrazione. Poiché u è soluzione debole di (6.1), scegliendo v come funzione test si ha

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx.$$

Similmente, si ha

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \mu \int_\Omega uv \, dx,$$

da cui

$$(\lambda - \mu) \int_\Omega uv \, dx = 0.$$

Poiché $\lambda \neq \mu$, ne segue $u \perp v$ in $L^2(\Omega)$. Inoltre, dalle relazioni precedenti $u \perp v$ in $H^1_0(\Omega)$. □

Applichiamo allo studio di (6.1) la teoria sullo spettro di un operatore compatto introdotta in [8] (con una 'prospettiva inversa'):

Teorema 6.3. *Sia Ω un dominio regolare limitato. Allora esistono due successioni (λ_n) in $(0, \infty)$, (e_n) in $H^1_0(\Omega)$ t.c.*

- *(i)* $\lambda_n \to \infty$;
- *(ii)* *per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ si ha $e_n \in E(\lambda_n)$;*
- *(iii)* $\sigma(\Omega) = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$;
- *(iv)* *(e_n) è una base ortonormale di $L^2(\Omega)$.*

[7] Questa definizione di *spettro* differisce lievemente da quella vista in [8].

Dimostrazione. Sappiamo dal Teorema 4.1 che per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste unica $u \in H^1_0(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx. \tag{6.2}$$

Poniamo $T(f) = u$, definendo così un operatore lineare iniettivo $T \in L(L^2(\Omega))$ (*operatore risolvente*). Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 4.5 si vede che $T \in \mathcal{K}(L^2(\Omega))$. Proviamo infine che T è autoaggiunto: infatti, per ogni $f, g \in L^2(\Omega)$, posto $u = T(f)$, $v = T(g)$, da (6.2) si ha

$$\int_\Omega ug \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx,$$

da cui $T = T^*$. Poiché $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert separabile (ved. [2, Theorem 4.13]), per i risultati visti in [8] esiste una base ortonormale (e_n) di $L^2(\Omega)$ formata da autovettori di T, ovvero per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ esiste $\mu_n \in \mathbb{R}$ t.c.

$$T(e_n) = \mu_n e_n.$$

Ovvero, per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega \nabla(\mu_n e_n) \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega e_n \varphi \, dx.$$

Ponendo $\varphi = \mu_n e_n$ abbiamo

$$\mu_n = \mu_n \|e_n\|_2^2 = \int_\Omega |\nabla(\mu_n e_n)|^2 \, dx \geqslant 0.$$

Inoltre dall'iniettività di T si ha $\mu_n > 0$. Proviamo ora che la successione (μ_n) ha infiniti termini distinti. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ l'autospazio di T associato a μ_n si può rappresentare come

$$\ker(\mu_n I - T),$$

e ha quindi dimensione finita per il Teorema di alternativa di Fredholm [8]. Dunque, se (μ_n) avesse solo un numero finito di termini distinti, anche la successione (e_n) avrebbe solo un numero finito di termini distinti, contro il fatto che essa è una base ortonormale di $L^2(\Omega)$. Sempre per i risultati di [8], ne segue che $\mu_n \to 0^+$.

Poniamo ora per ogni $n \in \mathbb{N}_0$

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} > 0.$$

Da $\mu_n \to 0^+$ segue $\lambda_n \to \infty$ (*i*). Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda_n \int_\Omega \nabla(\mu_n e_n) \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda_n \int_\Omega e_n \varphi \, dx,$$

quindi $\lambda_n \in \sigma(\Omega)$ con autofunzione associata e_n (*ii*). Viceversa, per ogni $\lambda \in \sigma(\Omega)$ si vede facilmente che $\frac{1}{\lambda}$ è un autovalore di T, dunque esiste $n \in \mathbb{N}_0$ t.c. $\lambda = \lambda_n$ (*iii*). E chiaramente (*iv*) è già acquisita. □

Osservazione 6.4. Per il Teorema 4.1, per $\lambda = 0$ il problema (6.1) ha solo la soluzione banale $u = 0$, tuttavia in alcuni contesti conviene porre $0 = \lambda_0 \in \sigma(\Omega)$.

Il calcolo degli autovalori del problema (6.1) può essere effettuato attraverso le formule di Courant-Fischer (ved. [5]). In questa sede, è importante osservare che il primo autovalore di (6.1) coincide con il *quoziente di Rayleigh*

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H^1_0(\Omega)} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2} > 0. \tag{6.3}$$

Si vede facilmente che la Diseguaglianza di Poincaré si può riformulare come segue: per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_2 \leqslant \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_2.$$

Questo autovalore è *semplice*, ovvero si ha

$$\dim(E(\lambda_1)) = 1,$$

inoltre $E(\lambda_1)$ si può generare mediante un'autofunzione $e_1 \in H_0^1(\Omega)$ t.c. $\|e_1\|_2 = 1$ e $e_1 > 0$ q.o. in Ω. Ragionando come in [8], si vede che per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_\Omega u e_n \, dx \Big) e_n$$

(nel senso della convergenza in $L^2(\Omega)$). Pertanto si può dedurre la seguente formula di *decomposizione spettrale* per l'operatore laplaciano:

$$-\Delta u = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_\Omega u e_n \, dx \Big) \lambda_n e_n.$$

Se Ω è di classe C^∞, si può applicare al problema (6.1) una teoria della regolarità simile a quella esposta nella Sezione 3, con un argomento di tipo *bootstrap*: per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, da $e_n \in L^2(\Omega)$ segue $e_n \in H^2(\Omega)$, il che a sua volta implica $e_n \in H^4(\Omega)$, e così via... in conclusione $e_n \in C^\infty(\Omega)$.
Ovviamente, esiste una teoria analoga per lo spettro di $-\Delta$ in $H^1(\Omega)$, ovvero per il problema di Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases} \tag{6.4}$$

In questo caso, però, $\lambda_0 = 0$ è un autovalore in senso proprio (le autofunzioni associate sono costanti in Ω).
Lo spettro del laplaciano verrà usato ancora in [10].

Esercizio 6.5. Enunciare un risultato analogo al Teorema 6.3 per il problema (6.4).

Esercizio 6.6. Nel Teorema 6.3 abbiamo provato che l'operatore risolvente di (4.2) è compatto. Stabilire se $-\Delta$, considerato come operatore lineare da $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, è compatto.

Esercizio 6.7. Applicando i risultati delle Sezioni 5 e 6, dimostrare che, dati un dominio limitato regolare $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $f \in L^2(\Omega)$, il problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

ammette soluzione se e solo se

$$\int_\Omega f e_1 \, dx = 0.$$

7. L'operatore p-Laplaciano

Concludiamo questa introduzione alle EDP ellittiche con un breve cenno alle equazioni ellittiche *non lineari*. Ci occuperemo di un caso molto semplice, rinviando a [5, 12] per un'esposizione completa. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio regolare limitato, $p > 1$, $u \in C^2(\Omega)$. Definiamo un operatore differenziale del secondo ordine non lineare detto *p-laplaciano*, ponendo per ogni $x \in \Omega$

$$\Delta_p u(x) = \operatorname{div}(|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)),$$

con la convenzione che $\Delta_p u(x) = 0$ se $\nabla u(x) = 0$ (ovviamente per $p = 2$ si ha $\Delta_2 = \Delta$). Consideriamo la seguente estensione non lineare dell'equazione di Poisson con condizioni di Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma, \end{cases} \tag{7.1}$$

con $f \in L^{p'}(\Omega)$. La definizione di soluzione classica per il problema (7.1) è intuitiva, e dalla formula di Gauß-Green ricaviamo la seguente:

Definizione 7.1. *Una soluzione debole di (7.1) è una funzione $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ t.c. per ogni $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Formalmente, per il problema (7.1) vale un risultato analogo a quello relativo a (4.1):

Teorema 7.2. *Siano Ω un dominio regolare limitato, $f \in L^{p'}(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ di (7.1). Inoltre, posto*

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \int_\Omega f u \, dx,$$

si ha

$$J(u) = \min_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(v).$$

Dimostrazione. Sullo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ adottiamo la norma $\|u\| = \|\nabla u\|_p$, equivalente a quella usuale grazie alla Diseguaglianza di Poincaré (ved. [9]). Da $f \in L^{p'}(\Omega)$ e dalla caratterizzazione del duale $W^{-1,p'}(\Omega)$ (ved. ancora [9]) segue che il funzionale lineare

$$u \mapsto \int_\Omega f u \, dx$$

è continuo in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dunque, $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ è continuo. Inoltre, J è convesso. Infatti, la funzione $\xi \to |\xi|^p$ è convessa in $\mathbb{R}^N$, quindi per ogni $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\tau \in [0,1]$ si ha

$$\begin{aligned} J((1-\tau)u + \tau v) &= \frac{1}{p} \int_\Omega \big|(1-\tau)\nabla u + \tau \nabla v|^p \, dx - \int_\Omega f((1-\tau)u + \tau v) \, dx \\ &\leqslant \frac{1}{p} \int_\Omega \big((1-\tau)|\nabla u|^p + \tau |\nabla v|^p\big) \, dx \int_\Omega f((1-\tau)u + \tau v) \, dx \\ &= (1-\tau)J(u) + \tau J(v). \end{aligned}$$

Infine, J è coercivo, in quanto per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$J(u) \geqslant \frac{\|u\|^p}{p} - \|f\|_{p'} \|u\|_p \geqslant \frac{\|u\|^p}{p} - C\|u\|$$

(dove abbiamo usato la Diseguaglianza di Hölder e l'immersione $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$), e pertanto

$$\lim_{\|u\| \to \infty} J(u) = \infty.$$

Poiché $W_0^{1,p}(\Omega)$ è riflessivo, per [2, Corollary 3.23] (ved. anche [8]) esiste $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ t.c.

$$J(u) = \min_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(v). \tag{7.2}$$

Proviamo che u risolve (7.1). Per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $t > 0$, da (7.2) si ha $J(u + t\varphi) \geqslant J(u)$, ovvero

$$\frac{1}{p} \int_\Omega \frac{|\nabla(u + t\varphi)|^p - |\nabla u|^p}{t} \, dx \geqslant \int_\Omega f \frac{(u + t\varphi) - u}{t} \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Passando al limite per $t \to 0^+$, abbiamo

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \geqslant \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Sostituendo φ con $-\varphi$, otteniamo la diseguaglianza opposta. Per densità (ved. [9]), la relazione precedente vale per ogni $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Per la Definizione 7.1, u è soluzione debole di (7.1).

Infine, proviamo che u è unica. Siano $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ soluzioni di (7.1). Allora, usando $u - v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ come funzione test, otteniamo

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v \right) \cdot (\nabla u - \nabla v) \, dx = 0.$$

Ricordiamo da [12, p. 28] le seguenti diseguaglianze, valide per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ e $c > 0$ indipendente da ξ, η:

$$\left(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta \right) \cdot (\xi - \eta) \geqslant \begin{cases} c|\xi - \eta|^p & \text{se } p \geqslant 2 \\ c(|\xi| + |\eta|)^{p-2} |\xi - \eta|^2 & \text{se } p < 2. \end{cases}$$

Consideriamo il caso $p \geqslant 2$. Dalla diseguaglianza precedente si ricava

$$\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p \, dx \leqslant 0,$$

quindi $u = v$ (come elementi di $W_0^{1,p}(\Omega)$). Il caso $p < 2$ si tratta analogamente. □

Osservazione 7.3. La teoria della regolarità per il p-laplaciano non è di semplice comprensione: in generale, anche se Ω è di classe C^∞ e $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, non è detto che la soluzione u di (7.1) sia classica, mentre si può dimostrare che $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ per un opportuno $\alpha \in (0, 1)$ (ved. [7]).

Esercizio 7.4. Dimostrare l'unicità della soluzione debole per il problema (7.1), nel caso $p < 2$.

Esercizio 7.5. Dimostrare il principio del massimo per il problema (7.1).

Esercizio 7.6. Dimostrare che per ogni $f \in L^{p'}(\Omega)$ esiste unica la soluzione debole del problema di Neumann

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(x) & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Gamma. \end{cases}$$

Riferimenti bibliografici

[1] A. Ambrosetti, G. Prodi, A primer of nonlinear analysis, Cambridge (1993)
[2] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer (2011)
[3] B. Dacorogna, Direct methods in the calculus of variations, Springer (2008)
[4] F. Demengel, G. Demengel, Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations, Springer (2012)
[5] L.C. Evans, Partial differential equations, American Mathematical Society (1998)
[6] D.G. de Figueiredo, Positive solutions of semilinear elliptic problems, in 'Differential Equations (São Paulo, 1981)', Springer (1982)
[7] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of the second order, Springer (1983).
[8] A. Iannizzotto, Spazi di Hilbert e operatori lineari
[9] A. Iannizzotto, Spazi di Sobolev
[10] A. Iannizzotto, Equazioni alle derivate parziali lineari/2: Problemi evolutivi
[11] F. John, Partial differential equations, Springer (1982)

[12] D. Motreanu, V.V. Motreanu, N.S. Papageorgiou, Topological and variational methods with applications to nonlinear boundary value problems, Springer (2014)
[13] P. Pucci, J. Serrin, The maximum principle, Birkhäuser (2007)
[14] M. Struwe, Variational methods, Springer (2008)

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Cagliari
Via Ospedale 72, 09124 Cagliari, Italy
Email address: antonio.iannizzotto@unica.it