SPAZI DI HILBERT E OPERATORI LINEARI

ANTONIO IANNIZZOTTO

SOMMARIO. Definizioni di prodotto scalare, spazio di Hilbert. Identità del parallelogramma, diseguaglianza di Cauchy-Schwarz, proiezione metrica. Duale di uno spazio di Hilbert: teorema di rappresentazione di Riesz, complemento ortogonale. Forme bilineari: teoremi di Stampacchia, Lax-Milgram. Basi ortonormali: teorema di decomposizione, identità di Parseval. Operatori lineari, continui, compatti, di rango finito. Operatore aggiunto: proprietà, teorema di Schauder. Teoria di Riesz-Fredholm: lemma di Riesz, teorema di alternativa di Fredholm. Spettro di un operatore lineare: proprietà, teorema di decomposizione spettrale. Queste note sono un mero supporto didattico, senza alcuna pretesa di completezza, originalità o precisione.

INDICE

Versione del 25 aprile 2022

L'analisi è una sinfonia dell'infinito.
D. HILBERT

1. SPAZI DI HILBERT

Sia X uno spazio vettoriale (reale[1]), di dimensione finita o infinita. Su di esso costruiamo una struttura che estende la nozione elementare di *angolo* compreso fra due vettori negli spazi euclidei, a partire dalla seguente definizione:

Definizione 1.1. *Un prodotto scalare su X è una funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ t.c.*

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ *per ogni* $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *(linearità);*
(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ *per ogni* $x, y \in X$ *(simmetria);*
(iii) $\langle x, x \rangle > 0$ *per ogni* $x \in X \setminus \{0\}$, $\langle 0, 0 \rangle = 0$ *(positività)*[2].

La coppia $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è uno spazio pre-hilbertiano (di solito denotato solo X).

La Definizione 1.1 estende una nota nozione della geometria euclidea:

[1] In queste note gli spazi vettoriali saranno sempre definiti sul campo $\mathbb{R}$, salva indicazione contraria.
[2] Denoteremo con 0 sia il numero reale nullo, sia il vettore nullo di qualunque spazio vettoriale.

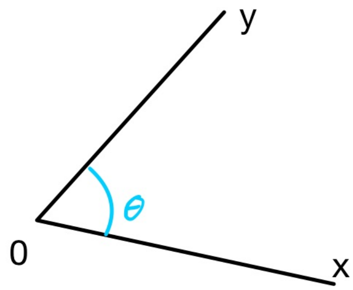

FIGURA 1. Prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$.

Esempio 1.2. Nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$, il prodotto scalare di due vettori x, y è definito da

$$\langle x, y\rangle = |x||y|\cos(\theta),$$

dove $|x|, |y| \geqslant 0$ denotano i moduli di x, y e $\theta \in [0, 2\pi)$ l'angolo compreso fra x e y (fig. 1). Rappresentando i due vettori attraverso le loro componenti e ponendo $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, si ha

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Si vede facilmente che questo prodotto soddisfa la Definizione 1.1. In generale, nello spazio euclideo $\mathbb{R}^N$ ($N \geqslant 2$) si definisce un prodotto scalare ponendo per ogni $x = (x_1, \dots x_N)$, $y = (y_1, \dots y_N)$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_iy_i.$$

In uno spazio pre-hilbertiano $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, due elementi $x, y \in X$ sono detti *ortogonali* se

$$\langle x, y\rangle = 0,$$

e in tal caso scriviamo $x \perp y$. Dalla Definizione 1.1 *(iii)* segue che l'unico elemento ortogonale a tutti gli altri elementi di X è il vettore nullo $x = 0$. In generale:

Definizione 1.3. *Siano X uno spazio pre-hilbertiano, $A \subset X$ non vuoto. Il complemento ortogonale di A è*

$$A^\perp = \big\{y \in X : \langle x, y\rangle = 0 \text{ per ogni } x \in A\big\}.$$

Si ha inoltre la seguente proprietà fondamentale:

Lemma 1.4. (Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz) *Sia X uno spazio pre-hilbertiano. Allora per ogni $x, y \in X$*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Dimostrazione. Per la Definizione 1.1 *(iii)* la tesi ha senso. Essa è banale per $y = 0$, quindi supponiamo $y \neq 0$ e applichiamo le proprietà *(i)* − *(iii)*:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \Big\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}y, x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}y\Big\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - 2\frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} \\
&= \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle}.
\end{aligned}$$

Si ha pertanto
$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle,$$
da cui la tesi. □

Sia X uno spazio pre-hilbertiano. Poniamo per ogni $x \in X$
$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}.$$
Si verifica facilmente che $\|\cdot\|$ è una *norma* su X[3], ovvero che essa soddisfa le seguenti proprietà:

(*i*) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$;
(*ii*) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ per ogni $x, y \in X$;
(*iii*) $\|x\| > 0$ per ogni $x \in X \setminus \{0\}$, $\|0\| = 0$.

Infatti, (*i*), (*iii*) seguono immediatamente dalla Definizione 1.1. Inoltre dal Lemma 1.4 si ha per ogni $x, y \in X$
$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$
da cui (*ii*). La diseguaglianza di Cauchy-Schwarz si riformula come segue: per ogni $x, y \in X$
$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|. \tag{1.1}$$
Dalla definizione di $\|\cdot\|$ si deduce facilmente la seguente *identità del parallelogramma*: per ogni $x, y \in X$
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}. \tag{1.2}$$

Osservazione 1.5. In effetti, (1.2) è una proprietà caratteristica degli spazi pre-hilbertiani: infatti, se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato verificante (1.2), allora su X possiamo definire un prodotto scalare ponendo per ogni $x, y \in X$
$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}.$$
A sua volta, $\|\cdot\|$ induce una *metrica* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definita per ogni $x, y \in X$ da
$$d(x, y) = \|x - y\|,$$
e questa determina su X una topologia. Per ogni insieme $A \subseteq X$, denoteremo $\mathrm{int}(A)$ l'interno, $\overline{A}$ la chiusura, ∂A la frontiera di A. Poniamo anche
$$\mathrm{span}(A) = \Big\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N},\, x_1, \dots x_n \in A,\, \lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$
Inoltre, per ogni $x \in X$, $r > 0$ denoteremo
$$B_r(x) = \big\{y \in X : \|x - y\| < r\big\},\ \overline{B}_r(x) = \big\{y \in X : \|x - y\| \leqslant r\big\}$$[4]
Inoltre, per ogni funzionale $J : X \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ denoteremo
$$\begin{aligned}J^c &= \big\{x \in X : J(x) < c\big\},\ \overline{J}^c = \big\{x \in X : J(x) \leqslant c\big\}, \\ J_c &= \big\{x \in X : J(x) > c\big\},\ \overline{J}_c = \big\{x \in X : J(x) \geqslant c\big\}.\end{aligned}$$

[3] In queste note useremo lo stesso simbolo $\|\cdot\|$ per le norme di diversi spazi, salva indicazione contraria.
[4] Se $x = 0$, ometteremo il centro, per esempio scriveremo B_1 invece di $B_1(0)$.

Nella seguente definizione specializziamo la nozione di spazio pre-hilbertiano dal punto di vista topologico:

Definizione 1.6. *Uno spazio di Hilbert è uno spazio pre-hilbertiano, completo rispetto alla metrica indotta dal prodotto scalare.*

Chiaramente, ogni spazio di Hilbert è uno *spazio di Banach*. Pertanto, ad esso si applica per intero la teoria relativa a questa più ampia famiglia di spazi, per esempio il Teorema di Hahn-Banach, il concetto di spazio duale, la topologia debole. Per la teoria degli spazi di Banach rimandiamo a [2] e per approfondimenti a [3, 5].

Per ogni $A \subset X$, il complemento ortogonale $A^\perp$ (Definizione 1.3) è un sottospazio[5] chiuso di X. In particolare, se $Y \subset X$ è un sottospazio chiuso si ha

$$X = Y \oplus Y^\perp, \tag{1.3}$$

ovvero per ogni $x \in X$ esistono unici $y \in Y$, $z \in Y^\perp$ t.c. $x = y + z$.

Esempio 1.7. Lo spazio $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$ dotato della norma euclidea

$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^N x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \ x = (x_1, \dots x_N)$$

è uno spazio di Hilbert, con il prodotto scalare definito nell'Esempio 1.2. Lo stesso spazio con la norma

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^N |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \ (p \geqslant 1, \, p \neq 2)$$

non lo è. Infatti, posto $N = 2$, $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$, si ha

$$\Big\|\frac{x+y}{2}\Big\|_p^2 + \Big\|\frac{x-y}{2}\Big\|_p^2 = \Big[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\Big]^{\frac{2}{p}} + \Big[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\Big]^{\frac{2}{p}} = 2^{\frac{2-p}{p}},$$

mentre

$$\frac{\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2}{2} = 1,$$

dunque (1.2) non è verificata. Così $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_p)$ non è uno spazio di Hilbert (Osservazione 1.5). Ricordiamo che tutte le norme definite su $\mathbb{R}^N$ sono equivalenti, pertanto la differenza fra $(\mathbb{R}^N, \| \cdot \|_2)$ e $(\mathbb{R}^N, \| \cdot \|_p)$ non riguarda le proprietà topologiche.

Esempio 1.8. Lo spazio ℓ^2, formato dalle successioni $x = (x_n)$ a termini reali t.c.

$$\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty,$$

è uno spazio di Hilbert di dimensione infinita, con la norma

$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{n=1}^\infty x_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Esempio 1.9. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato. Lo spazio $L^2(\Omega)$, formato dalle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili[6] t.c. u^2 è sommabile (u è definita a meno di un insieme di misura nulla, ovvero è a rigore una classe di equivalenza di funzioni misurabili), è uno spazio di Hilbert con la norma

$$\|u\|_2 = \Big(\int_\Omega u(x)^2 \, dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

[5]Con questo termine intenderemo sempre un *sottospazio vettoriale*.

[6]La misura adottata è sempre quella di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$, salva indicazione contraria.

La completezza segue dal Teorema di Fischer-Riesz [2, Theorem 4.8].

Un'altra classe importante di spazi di Hilbert, che si usa nello studio delle equazioni differenziali lineari, è quella degli *spazi di Sobolev* con esponente 2, ved. [2, 6].

Fra gli spazi di Banach, quelli dotati di prodotto scalare sono particolarmente 'amichevoli' anche dal punto di vista dell'analisi funzionale. Ricordiamo che uno spazio di Banach $(X, \|\cdot\|)$ è *uniformemente convesso* [2, p. 76] se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ con la seguente proprietà: per ogni $x, y \in \overline{B}_1$, $\|x - y\| > \varepsilon$ si ha

$$\Big\|\frac{x+y}{2}\Big\| < 1 - \delta.$$

Si ha:

Proposizione 1.10. *Sia X uno spazio di Hilbert. Allora X è uniformemente convesso.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità fissiamo $\varepsilon \in (0, 2)$ e poniamo

$$\delta = 1 - \Big(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Abbiamo $\delta \in (0, 1)$, inoltre per ogni $x, y \in \overline{B}_1$ t.c. $\|x - y\| > \varepsilon$, applicando (1.2) si ha

$$\Big\|\frac{x+y}{2}\Big\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \Big\|\frac{x-y}{2}\Big\|^2 \leqslant 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} = (1-\delta)^2,$$

da cui la tesi. □

Proposizione 1.11. *Sia X uno spazio di Hilbert. Allora X è riflessivo.*

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 1.10 e dal Teorema di Milman-Pettis [2, Theorem 3.31]. □

Come nel caso generale degli spazi di Banach, il *duale* (topologico) di uno spazio di Hilbert X è denotato X^* e formato dai funzionali lineari continui su X [2, p. 3]. Anche X^* è uno spazio di Banach, con norma definita per ogni $\varphi \in X^*$ da

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in \partial B_1} \varphi(x).$$

Riportiamo una semplice proprietà che useremo spesso:

Lemma 1.12. *Siano X uno spazio di Banach, $Y \subseteq X$ un sottospazio. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) Y è denso in X;
(ii) per ogni $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ esiste $y \in Y$ t.c. $\varphi(y) \neq 0$.

Dimostrazione. Proviamo che *(i)* implica *(ii)*. Supponiamo che $\overline{Y} = X$ e che $\varphi \in X$ soddisfi $\varphi(y) = 0$ per ogni $y \in Y$. Allora, poiché φ è continuo, si ha $\varphi = 0$.

Proviamo che *(ii)* implica *(i)*, per assurdo: se Y non è denso in X, allora $\overline{Y}$ è un sottoinsieme chiuso convesso di X ed esiste $x_0 \in X \setminus \overline{Y}$. Per il Teorema di Hahn-Banach [2, Theorem 1.7] esistono $\varphi \in X^*$, $c \in \mathbb{R}$ t.c. per ogni $y \in \overline{Y}$

$$\varphi(y) < c < \varphi(x_0).$$

Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha ancora $\lambda y \in \overline{Y}$, da cui

$$\lambda\varphi(y) < c.$$

Ne segue $\varphi(y) = 0$ per ogni $y \in \overline{Y}$, da cui $c > 0$ e $\varphi(x_0) > 0$, dunque $\varphi \neq 0$, contro *(ii)*. □

Vediamo un modo semplice per definire funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert. Fissato $x \in X$, il funzionale $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definito per ogni $y \in X$ da

$$\varphi(y) = \langle x, y \rangle$$

è lineare (Definizione 1.1), inoltre esso è continuo per (1.1). Ma la cosa interessante è che *tutti* i funzionali lineari continui si possono rappresentare in questo modo:

Teorema 1.13. (di rappresentazione di Riesz-Fréchet) *Siano X uno spazio di Hilbert, $\varphi \in X^*$. Allora esiste un unico $x \in X$ t.c. per ogni $y \in X$*

$$\varphi(y) = \langle x, y \rangle.$$

Inoltre $\|x\| = \|\varphi\|$.

Dimostrazione. Costruiamo una mappa $T : X \to X^*$ come segue: per ogni $x \in X$, $T(x) \in X^*$ è il funzionale definito per ogni $y \in X$ da

$$T(x)(y) = \langle x, y \rangle.$$

Chiaramente T è un operatore lineare. Inoltre, per ogni $x \in X$, $y \in \partial B_1$, da (1.4) si ha

$$\langle x, y \rangle \leqslant \|x\| = \Big\langle x, \frac{x}{\|x\|} \Big\rangle,$$

da cui

$$\|T(x)\| = \sup_{y \in \partial B_1} |\langle x, y \rangle| = \|x\|.$$

Dunque, T è un'isometria lineare. Il suo rango $T(X) \subset X^*$ è un sottospazio chiuso (isometrico a X e quindi completo). D'altra parte, $T(X)$ è denso in X^*, come segue dal Lemma 1.12. Infatti, fissiamo $\varphi \in X^{**}$ (il *biduale* di X, ved. [2, p. 8]) t.c. $\varphi|_{T(X)} = 0$. Poiché X è riflessivo (Proposizione 1.11), esiste $x \in X$ t.c. per ogni $\psi \in X^*$ si ha

$$\varphi(\psi) = \psi(x),$$

e inoltre $\|\varphi\| = \|x\|$. Dunque, per ogni $y \in X$ abbiamo

$$\langle x, y \rangle = T(y)(x) = \varphi(T(y)) = 0,$$

da cui $x = 0$. Per isometria, $\varphi = 0$. Dunque $T(X)$ è un sottospazio chiuso e denso di X^*, ovvero $T(X) = X^*$, il che conclude la dimostrazione. $\square$

Per il Teorema 1.13 si può identificare $X \sim X^*$ (mediante l'isometria lineare biunivoca T). In particolare, anche X^* è uno spazio di Hilbert. Per esempio, il duale di $L^2(\Omega)$ si identifica con $L^2(\Omega)$ [2, Theorem 4.11]. Alla luce del Teorema 1.13, il Lemma 1.12 si riformula, in uno spazio di Hilbert X, come segue: *un sottospazio $Y \subseteq X$ è denso se, e solo se, $Y^\perp = \{0\}$.*

Si ha inoltre la seguente utile proprietà:

Lemma 1.14. *Siano X uno spazio di Hilbert, $Y \subset X$ un sottospazio. Allora*

$$(Y^\perp)^\perp = \overline{Y}.$$

Dimostrazione. Sia $y \in Y$. Allora per ogni $x \in Y^\perp$

$$\langle x, y \rangle = 0,$$

cioè $y \in (Y^\perp)^\perp$. Inoltre questo è un sottospazio chiuso di X, da cui $\overline{Y} \subseteq (Y^\perp)^\perp$.

Viceversa, dimostriamo che $(Y^\perp)^\perp \subseteq \overline{Y}$ per assurdo. Sia $x \in (Y^\perp)^\perp \setminus \overline{Y}$. Allora, per il Teorema di Hahn-Banach [2, Theorem 1.7] e per il Teorema 1.13 esistono $z \in X$, $c \in \mathbb{R}$ t.c. per ogni $y \in Y$

$$\langle z, y \rangle < c < \langle z, x \rangle.$$

Sostituendo y con $\lambda y \in Y$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) nella diseguaglianza precedente e facendo tendere $\lambda \to \pm\infty$ si vede che in effetti $z \in Y^\perp$, da cui $c > 0$. Abbiamo allora

$$\langle z, x\rangle > 0,$$

contro l'ipotesi che $x \in (Y^\perp)^\perp$. □

Osservazione 1.15. Per ogni spazio riflessivo X vale l'identificazione $X \sim X^{**}$, ma solo per uno spazio di Hilbert si ha $X \sim X^* \sim X^{**}$ (e si può prolungare la catena indefinitamente). Osserviamo tuttavia che non sempre identificare un funzionale $\varphi \in X^*$ col suo 'rappresentante' in X è facile o conveniente (vedremo un esempio significativo in [6]).

Osservazione 1.16. In uno spazio di Banach la nozione di ortogonalità non esiste. Tuttavia, per ogni sottospazio $Y \subset X$ sono definiti due 'complementi': il *complemento ortogonale* è un sottospazio di X^* definito da

$$Y^\perp = \big\{\varphi \in X^* : \varphi(y) = 0 \text{ per ogni } y \in Y\big\},$$

mentre il *complemento diretto* è qualunque sottospazio $Z \subset X$ t.c. $X = Y \oplus Z$ (questo può non esistere, o non essere unico, ved. [2, p. 38]). Se X è uno spazio di Hilbert, queste nozioni coincidono.

Esercizio 1.17. Siano X uno spazio pre-hilbertiano, $x \in X$ t.c. $\langle x, y\rangle = 0$ per ogni $y \in X$. Dimostrare che $x = 0$.

Esercizio 1.18. Dimostrare che il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ definito nell'Esempio 1.2 verifica la Definizione 1.1 e il Lemma 1.4.

Esercizio 1.19. Dimostrare l'Osservazione 1.5.

Esercizio 1.20. Trovare un esempio di uno spazio di Hilbert e di un suo sottospazio non chiuso.

Esercizio 1.21. Dimostrare (1.3) (fare uso del successivo Corollario 2.4).

Esercizio 1.22. Siano X uno spazio di Hilbert, $Y \subset X$ un sottospazio. Dimostrare che $Y^\perp = \{0\}$ se e solo se Y è denso in X.

Esercizio 1.23. Sia $u \in L^2(\Omega)$ una funzione q.o. positiva: dimostrare che per ogni $v \in \{u\}^\perp$, la funzione v cambia segno in Ω.

2. Approssimazione e ottimizzazione

Questa sezione è dedicata ai problemi di approssimazione e di ottimizzazione coinvolgenti sottoinsiemi chiusi e convessi di uno spazio di Hilbert. Tali problemi sono strettamente collegati fra loro, e uno strumento fondamentale per la loro risoluzione è il seguente risultato di analisi funzionale:

Lemma 2.1. *Siano X uno spazio riflessivo, $K \subseteq X$ un insieme chiuso e convesso, $J : X \to \mathbb{R}$ un funzionale continuo, convesso, t.c.*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} J(x) = \infty.$$

Allora esiste $x_0 \in K$ t.c.

$$J(x_0) = \inf_{x\in K} J(x).$$

Dimostrazione. Adottiamo su X la topologia debole $\sigma(X, X^*)$ [2, p. 57]. Fissiamo

$$c > \inf_{x\in X} J(x),$$

e definiamo

$$K_c = \big\{x \in K : J(x) \leqslant c\big\}.$$

L'insieme K_c è (fortemente) chiuso e convesso, pertanto è debolmente chiuso [2, Theorem 3.7]. Inoltre, per ipotesi esiste $R > 0$ t.c. $J(x) \geqslant c$ per ogni $\|x\| > R$, quindi $K_c \subseteq \overline{B}_R$ è limitato. Per il Teorema di Kakutani [2, Theorem 3.17], K_c è debolmente compatto.
Similmente, poiché J è continuo e convesso, $\overline{J}^a$ è debolmente chiuso per ogni $a \in \mathbb{R}$, ovvero J è debolmente semi-continuo inferiormente in X. Applicando il Teorema di Weierstraß alla funzione $J|_{K_c}$ (con la topologia debole relativizzata) si trova $x_0 \in K_c$ t.c. per ogni $x \in K_c$

$$J(x) \geqslant J(x_0).$$

D'altra parte, ovviamente per ogni $x \in K \setminus K_c$ si ha

$$J(x) > c \geqslant J(x_0),$$

da cui la tesi. □

Il primo problema che affrontiamo è quello dell'*approssimazione metrica* di un elemento di uno spazio di Hilbert mediante elementi di un sottoinsieme chiuso e convesso assegnato:

Teorema 2.2. *Siano X uno spazio di Hilbert, $K \subseteq X$ chiuso, convesso, $y \in X$. Allora esiste un unico $x_0 \in K$ t.c.*

$$\|x_0 - y\| = \inf_{x \in K} \|x - y\|.$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ poniamo

$$J(x) = \|x - y\|^2.$$

Chiaramente J è un funzionale continuo e convesso t.c.

$$\lim_{\|x\| \to \infty} J(x) = \infty.$$

Dunque, per il Lemma 2.1 esiste $x_0 \in K$ t.c.

$$J(x_0) = \inf_{x \in K} J(x).$$

Proviamo che x_0 è unico, per assurdo: sia $x_1 \in K \setminus \{x_0\}$ t.c. $J(x_1) = J(x_0)$, allora per convessità abbiamo $\frac{x_0 + x_1}{2} \in K$, mentre per (1.2)

$$\begin{aligned}
J\Big(\frac{x_0 + x_1}{2}\Big) &= \Big\|\frac{(x_0 - y) + (x_1 - y)}{2}\Big\|^2 \\
&= \frac{\|x_0 - y\|^2 + \|x_1 - y\|^2}{2} - \Big\|\frac{(x_0 - y) - (x_1 - y)}{2}\Big\|^2 \\
&= \frac{J(x_0) + J(x_1)}{2} - \frac{\|x_0 - x_1\|^2}{4} \\
&< \inf_{x \in K} J(x),
\end{aligned}$$

assurdo. □

Per il Teorema 2.2, per ogni insieme chiuso convesso $K \subseteq X$ è definita un'unica mappa $\Pi_K : X \to K$ t.c. per ogni $y \in X$

$$\|y - \Pi_K(y)\| = \min_{x \in K} \|x - y\|,$$

detta *proiezione metrica*. Si vede facilmente che Π_K è una mappa *non-espansiva*, cioè per ogni $y_1, y_2 \in X$

$$\|\Pi_K(y_1) - \Pi_K(y_2)\| \leqslant \|y_1 - y_2\|$$

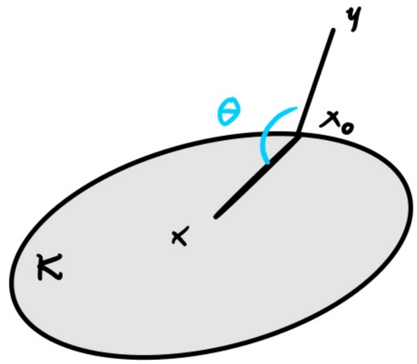

FIGURA 2. Proiezione metrica in $\mathbb{R}^2$.

(ovvero, Π_K è lipschitziana con costante 1), in particolare $\Pi_K \in C(X, K)$. La particolarità degli spazi di Hilbert è che la proiezione metrica di y su K è anche l'unica soluzione della seguente disequazione:

$$\begin{cases} \langle y - x_0, x - x_0 \rangle \leqslant 0 \quad \text{per ogni } x \in K \\ x_0 \in K. \end{cases} \tag{2.1}$$

In $\mathbb{R}^2$, il problema (2.1) ha un elementare significato geometrico: per ogni $x \in K$, i vettori $y - x_0$, $x - x_0$ formano un angolo ottuso (fig. 2).

Proposizione 2.3. *Siano X uno spazio di Hilbert, $K \subset X$ chiuso, convesso, $y \in X$. Allora, per ogni $x_0 \in X$ le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(*i*) $x_0 = \Pi_K(y)$;
(*ii*) x_0 *soddisfa* (2.1).

Dimostrazione. Proviamo che (*i*) implica (*ii*). Supponiamo che $x_0 = \Pi_K(y)$, allora ovviamente $x_0 \in K$. Inoltre, per ogni $x \in K$, $t \in [0, 1]$ poniamo

$$x_t = (1 - t)x_0 + tx \in K$$

(per convessità), così che

$$\begin{aligned} \|y - x_0\|^2 &\leqslant \|y - x_t\|^2 \\ &= \|(y - x_0) - t(x - x_0)\|^2 \\ &= \|y - x_0\|^2 - 2t\langle y - x_0, x - x_0 \rangle + t^2\|x - x_0\|^2, \end{aligned}$$

da cui

$$\langle y - x_0, x - x_0 \rangle \leqslant \frac{t}{2}\|x - x_0\|^2.$$

Passando al limite per $t \to 0^+$ si ha (2.1).
Proviamo che (*ii*) implica (*i*). Sia $x_0 \in K$ una soluzione di (2.1), allora per ogni $x \in K$ abbiamo

$$\begin{aligned} \|y - x_0\|^2 - \|y - x\|^2 &= \|y - x_0\|^2 - \|(y - x_0) + (x_0 - x)\|^2 \\ &= -2\langle y - x_0, x_0 - x \rangle - \|x_0 - x\|^2 \\ &\leqslant 2\langle y - x_0, x - x_0 \rangle \leqslant 0, \end{aligned}$$

da cui $\|y - x_0\| \leqslant \|y - x\|$. Dunque $x_0 = \Pi_K(y)$. □

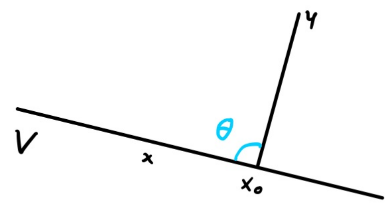

FIGURA 3. Proiezione ortogonale in $\mathbb{R}^2$.

Ovviamente, dal Teorema 2.2 e dalla Proposizione 2.3 segue che la disequazione (2.1) ha soluzione *unica* per ogni $y \in X$. Nel seguente corollario esaminiamo il caso di un sottospazio chiuso, in cui la disequazione (2.1) diventa un'equazione:

Corollario 2.4. *Siano X uno spazio di Hilbert, $V \subset X$ un sottospazio chiuso. Allora, per ogni $y \in X$ esiste un unico $x_0 \in V$ t.c. per ogni $x \in V$*

$$\langle y - x_0, x \rangle = 0.$$

Dimostrazione. Chiaramente $V \subset X$ è chiuso e convesso. Per il Teorema 2.2 e la Proposizione 2.3, $x_0 = \Pi_V(y)$ è l'unica soluzione di (2.1). Fissato $x \in V$, applichiamo (2.1) ai vettori $x_0 \pm x \in V$:

$$\langle y - x_0, x \rangle \leqslant 0 \leqslant \langle y - x_0, x \rangle,$$

da cui la conclusione. □

Dal Corollario 2.4 vediamo che la proiezione metrica di un vettore y su un sottospazio chiuso V coincide con la *proiezione ortogonale* di y su V (fig. 3).

Esempio 2.5. Nello spazio di Hilbert $L^2(0,1)$ (Esempio 1.9) consideriamo il sottospazio V_n formato dai polinomi di grado $\leqslant n$ ($n \in \mathbb{N}$), che è chiuso in quanto di dimensione finita. Per il Corollario 2.4, per ogni $u \in L^2(0,1)$ esiste un unico polinomio $p \in V_n$ che minimizza in V_n il funzionale

$$\int_0^1 (u(x) - p(x))^2 \, dx.$$

Esso è caratterizzato dalla relazione seguente, valida per ogni $q \in V_n$:

$$\int_0^1 (u(x) - p(x)) q(x) \, dx = 0.$$

Osservazione 2.6. Anche negli spazi di Banach uniformemente convessi la proiezione metrica su un convesso è ben definita, ma ovviamente (2.1) non ha senso in generale. Gli insiemi per cui è definita la proiezione metrica sono detti *insiemi di Chebyshev* e sono oggetto di un celebre problema aperto di analisi funzionale (ved. [5, p. 560]): *esiste uno spazio di Hilbert che contiene almeno un insieme di Chebyshev non convesso?*

Introduciamo ora una nozione che estende quella di prodotto scalare:

Definizione 2.7. *Sia X uno spazio di Hilbert. Una forma bilineare su X è una funzione $a : X \times X \to \mathbb{R}$ t.c. per ogni $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$a(\alpha x + \beta y, z) = \alpha a(x,z) + \beta a(y,z), \;\; a(x, \alpha y + \beta z) = \alpha a(x,y) + \beta a(x,z).$$

Essa è detta

(*i*) *continua se esiste $C > 0$ t.c. $|a(x,y)| \leqslant C\|x\|\|y\|$ per ogni $x, y \in X$;*

(ii) *coerciva se esiste $c > 0$ t.c. $a(x, x) \geqslant c\|x\|^2$ per ogni $x \in X$;*
(iii) *simmetrica se $a(x, y) = a(y, x)$ per ogni $x, y \in X$.*

Chiaramente, a soddisfa (i) se e solo se $a \in C(X \times X, \mathbb{R})$. Un prodotto scalare è una forma bilineare continua, coerciva e simmetrica (Definizione 1.1), di contro ogni forma bilineare continua, coerciva e simmetrica definisce su X un prodotto scalare t.c. $(X, \|\cdot\|_a)$ è uno spazio di Hilbert, dove $\|x\|_a = a(x, x)^{\frac{1}{2}}$ è una norma equivalente a $\|\cdot\|$.

Esempio 2.8. Sullo spazio $L^2(\Omega)$, ogni funzione 'peso' $m \in L^\infty(\Omega)$, $m(x) \geqslant 0$ per q.o. $x \in \Omega$, induce una forma bilineare definita per ogni $u, v \in L^2(\Omega)$ da

$$a(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)m(x)\,dx.$$

Una *disequazione variazionale* su uno spazio di Hilbert X è un problema del tipo

$$\begin{cases} a(x_0, x - x_0) \geqslant \varphi(x - x_0) & \text{per ogni } x \in K \\ x_0 \in K, \end{cases} \tag{2.2}$$

dove $K \subseteq X$ è un insieme chiuso e convesso, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ una forma bilineare e $\varphi \in X^*$ un funzionale lineare continuo. Chiaramente (2.1) è un caso particolare di (2.2). Le disequazioni variazionali sono la tipica forma matematica dei problemi di ottimizzazione convessa, ovvero di programmazione lineare, e sono ampiamente studiate in analisi convessa (ved. [8]).

Teorema 2.9. (Stampacchia) *Siano X uno spazio di Hilbert, $K \subseteq X$ chiuso, convesso, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ una forma bilineare continua, coerciva, $\varphi \in X^*$. Allora esiste un'unica soluzione $x_0 \in K$ di (2.2).*

Dimostrazione. Per il Teorema 1.13 esiste un unico $h \in X$ t.c. per ogni $y \in X$

$$\varphi(y) = \langle h, y\rangle.$$

Similmente, per ogni $x \in X$ il funzionale $a(x, \cdot)$ è lineare e continuo in X, dunque esiste un unico $A(x) \in X$ t.c. per ogni $y \in X$

$$\langle A(x), y\rangle = a(x, y).$$

Applicando le proprietà di a vediamo che $A : X \to X$ è un operatore lineare e che per ogni $x \in X$

$$\|A(x)\| \leqslant C\|x\|, \ \langle A(x), x\rangle \geqslant c\|x\|^2.$$

Dunque riformuliamo il problema (2.2) come segue: *trovare $x_0 \in K$ t.c. per ogni $x \in K$*

$$\langle A(x_0) - h, x - x_0\rangle \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Per il Teorema 2.2 esiste la proiezione metrica $\Pi_K : X \to K$. Fissiamo dunque $\rho \in (0, 2c/C^2)$ e poniamo per ogni $x \in K$

$$T(x) = \Pi_K(x - \rho A(x) + \rho h).$$

La mappa $T : K \to K$ è una contrazione: infatti, per ogni $x_1, x_2 \in K$ si ha

$$\begin{aligned} \|T(x_1) - T(x_2)\|^2 &\leqslant \|(x_1 - \rho A(x_1) + \rho h) - (x_2 - \rho A(x_2) + \rho h)\|^2 \\ &= \|(x_1 - x_2) - \rho A(x_1 - x_2)\|^2 \\ &= \|x_1 - x_2\|^2 - 2\rho\langle A(x_1 - x_2), x_1 - x_2\rangle + \rho^2\|A(x_1 - x_2)\|^2 \\ &\leqslant (1 - 2c\rho + C^2\rho^2)\|x_1 - x_2\|^2. \end{aligned}$$

Dunque T è lipschitziana con costante $(1 - 2c\rho + C^2\rho^2)^{\frac{1}{2}} < 1$ (la diseguaglianza segue da un calcolo elementare). Inoltre K è uno spazio metrico completo. Per il Teorema di Banach-Caccioppoli[7] [2,

[7] Adottiamo, quando possibile, una denominazione autarchica dei teoremi.

Theorem 5.7], esiste un unico $x_0 \in K$ t.c. $T(x_0) = x_0$. Per la Proposizione 2.3, $x_0 \in K$ è l'unica soluzione di (2.1) con $y = x_0 - \rho A(x_0) + \rho h$, ovvero si ha per ogni $x \in K$

$$\langle (x_0 - \rho A(x_0) + \rho h) - x_0, x - x_0 \rangle \leqslant 0.$$

Questa relazione equivale a (2.3), e quindi a (2.2). □

Il Teorema 2.9 garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione di una disequazione variazionale generale, imperniata su una forma bilineare continua e coerciva. Se la forma è anche simmetrica, il problema equivale alla ricerca del minimo globale di un funzionale, ovvero si riformula come un problema di *ottimizzazione*:

Corollario 2.10. *Siano X uno spazio di Hilbert, $K \subseteq X$ chiuso, convesso, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ una forma bilineare continua, coerciva, simmetrica, $\varphi \in X^*$, e sia $J : K \to \mathbb{R}$ definito per ogni $x \in K$ da*

$$J(x) = \frac{a(x,x)}{2} - \varphi(x).$$

Allora esiste un unico $x_0 \in K$ t.c.

$$J(x_0) = \inf_{x \in K} J(x).$$

Dimostrazione. Denotiamo $\widetilde{X}$ lo spazio di Hilbert X col prodotto scalare indotto da a, $\tilde{h} \in \widetilde{X}$ il rappresentante di $\varphi \in \widetilde{X}^*$ (Teorema 1.13), $\widetilde{\Pi}_K : \widetilde{X} \to K$ la proiezione metrica su K (Teorema 2.2). Allora (2.2) equivale al seguente problema: *trovare $x_0 \in K$ t.c. per ogni $x \in K$*

$$a(\tilde{h} - x_0, x - x_0) \leqslant 0.$$

Per il Teorema 2.2 e la Proposizione 2.3, la soluzione (unica) è $x_0 = \widetilde{\Pi}_K(\tilde{h})$, che è anche l'unico punto di minimo globale in K di

$$x \mapsto a(x - \tilde{h}, x - \tilde{h}).$$

A questo punto basta osservare che per ogni $x \in K$

$$a(x - \tilde{h}, x - \tilde{h}) = a(x,x) - 2\varphi(x) + a(\tilde{h}, \tilde{h}) = 2J(x) + a(\tilde{h}, \tilde{h})$$

per avere la tesi. □

Osservazione 2.11. Il funzionale $J : K \to \mathbb{R}$ è continuo e convesso. Inoltre esso è coercivo, in quanto per ogni $x \in K$

$$J(x) \geqslant \frac{c}{2}\|x\|^2 - \|\varphi\|\|x\|,$$

e questa funzione diverge per $\|x\| \to \infty$. Dunque l'esistenza del minimo di I in K segue, anche direttamente, dal Lemma 2.1.

Se $K = X$, la disequazione (2.2) diventa un'equazione:

Teorema 2.12. (Lax-Milgram) *Siano X uno spazio di Hilbert, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ una forma bilineare continua, coerciva, $\varphi \in X^*$. Allora esiste un unico $x_0 \in X$ t.c. per ogni $x \in X$*

$$a(x_0, x) = \varphi(x).$$

Dimostrazione. Segue dal Teorema 2.9 con $K = X$, considerando i vettori $x_0 \pm x$. □

Se a è anche simmetrica, x_0 è l'unico punto di minimo globale di J (definito come nel Corollario 2.10) in X. Il Teorema 2.12 è lo strumento fondamentale per dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione di un'equazione alle derivate parziali ellittica lineare (ved. [2, 7]).

Esercizio 2.13. Siano X uno spazio di Hilbert, $K \subset X$ chiuso, convesso e limitato, $J : X \to \mathbb{R}$ continuo, convesso. Dimostrare che esiste $x_0 \in K$ t.c.

$$J(x_0) = \inf_{x \in K} J(x).$$

Esercizio 2.14. Siano X uno spazio di Hilbert, $K \subset X$ chiuso convesso. Dimostrare che Π_K è non-espansiva.

Esercizio 2.15. Siano X uno spazio di Hilbert, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ una forma bilineare continua, coerciva, simmetrica. Dimostrare che $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_a$ sono equivalenti.

Esercizio 2.16. Dimostrare che la forma bilineare definita nell'Esempio 2.8 è continua e simmetrica. Sotto quali ipotesi su m essa è anche coerciva?

3. Basi ortonormali

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^N$, ogni insieme di N vettori linearmente indipendenti $\{e_1, \dots e_N\}$ forma una *base*, ovvero qualunque altro vettore dello spazio si può esprimere in modo unico come combinazione lineare di $e_1, \dots e_N$. Essa è detta *base ortonormale* (b.o.n.) se per ogni $h, k \in \{1, \dots N\}$

$$\langle e_h, e_k \rangle = \delta_{h,k}{}^{8}.$$

Mediante il *metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt*, da ogni base di $\mathbb{R}^N$ si può ottenere una b.o.n. In uno spazio di Hilbert di dimensione infinita, non è possibile generare tutto lo spazio con un insieme finito di vettori, tuttavia si possono definire 'basi' infinite:

Definizione 3.1. *Sia X uno spazio di Hilbert. Una base ortonormale di X è una successione (e_k) in X t.c.*

(i) $\langle e_h, e_k \rangle = \delta_{h,k}$ *per ogni* $h, k \in \mathbb{N}$*;*
(ii) $\overline{\mathrm{span}\,(e_k)} = X$.

L'esistenza di una b.o.n. è legata alla topologia di X:

Teorema 3.2. *Sia X uno spazio di Hilbert separabile t.c.* $\dim(X) = \infty$*. Allora X ha una b.o.n.*

Dimostrazione. Per ipotesi esiste una successione (v_k) in X t.c. $\overline{(v_k)} = X$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ definiamo un sottospazio $F_k \subset X$ di dimensione $\leqslant k$ ponendo

$$F_k = \mathrm{span}(v_1, \dots v_k).$$

Fissiamo $e_1 \in F_1 \cap \partial B_1$: se $F_2 = F_1$, allora $\{e_1\}$ costituisce una b.o.n. di F_2, altrimenti esiste $x \in F_2 \cap F_1^\perp \setminus \{0\}$ (Lemma 1.12), quindi poniamo

$$e_2 = \frac{x}{\|x\|} \in F_2 \cap \partial B_1.$$

Si vede facilmente che $\{e_1, e_2\}$ è una b.o.n. di F_2. Così procedendo otteniamo una successione (e_k) in X verificante *(i)*. Inoltre,

$$(v_k) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \mathrm{span}(e_k),$$

da cui segue *(ii)*. Pertanto (e_k) è una b.o.n. di X. □

La condizione *(ii)* significa che $\mathrm{span}(e_k)$ è un sottospazio denso di X, ovvero $\mathrm{span}(e_k)^\perp = \{0\}$ (Lemma 1.12). Equivalentemente, per ogni $x \in X$ esiste un'unica successione (λ_k) in $\mathbb{R}$ t.c.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k. \tag{3.1}$$

[8] Qui e nel seguito $\delta_{h,k}$ è il coefficiente di Kronecker, cioè $\delta_{h,k} = 1$ se $h = k$ e $\delta_{h,k} = 0$ se $h \neq k$.

Questa rappresentazione è nota come *serie di Fourier* (astratta) di x in X. La convergenza in (3.1) è ovviamente riferita alla topologia di X, ovvero

$$x = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

L'identità (3.1) si estende al duale X^*: per ogni $\varphi \in X^*$, per il Teorema 1.13 esiste un unico $x \in X$ t.c. $\varphi(y) = \langle x, y \rangle$ per ogni $y \in X$. Per (3.1), si ha per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi(e_k) = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h \langle e_h, e_k \rangle = \lambda_k.$$

Dunque, per conoscere il rappresentante di φ basta calcolare $\varphi(e_k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Il seguente risultato fornisce un modo per calcolare i coefficienti (λ_k):

Proposizione 3.3. (Identità di Parseval) *Siano X uno spazio di Hilbert, (e_k) una b.o.n. di X. Allora, per ogni $x \in X$*

(i) $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$;

(ii) $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle^2$.

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo $E_k = \mathrm{span}\{e_k\}$, sottospazio di dimensione 1 (quindi chiuso). Fissato $x \in X$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo $y_k = \Pi_{E_k}(x)$. Esiste $\lambda_k \in \mathbb{R}$ t.c. $y_k = \lambda_k e_k$. Per il Corollario 2.4 si ha

$$0 = \langle x - y_k, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \lambda_k \|e_k\|^2,$$

da cui $\lambda_k = \langle x, e_k \rangle$ (ricordiamo che $\langle e_k, e_k \rangle = 1$). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Per la Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz (1.1) si ha

$$\|x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k \rangle = \langle x, x_n \rangle \leqslant \|x\| \|x_n\|,$$

da cui $\|x_n\| \leqslant \|x\|$. In particolare, passando al limite per $n \to \infty$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \leqslant \|x\|^2,$$

ovvero la successione (λ_k) appartiene a ℓ^2. Per il criterio di Cauchy (per le serie numeriche), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n \geqslant m \geqslant \nu$

$$\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k^2 < \varepsilon,$$

dunque (x_n) è una successione di Cauchy in X. Per completezza, si ha $x_n \to \tilde{x}$ in X. Dimostriamo ora che $x = \tilde{x}$. Infatti, per ogni $n \geqslant k$ si ha

$$\langle x - x_n, e_k \rangle = \lambda_k - \sum_{h=1}^{n} \lambda_h \langle e_h, e_k \rangle = 0.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ha per ogni $k \in \mathbb{N}$.

$$\langle x - \tilde{x}, e_k \rangle = 0.$$

Per il Lemma 1.12, ne segue $x = \tilde{x}$. Così abbiamo *(i)*.
Inoltre, poiché $x_n \to x$ in X, abbiamo

$$\|x\|^2 = \lim_n \|x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2,$$

ovvero *(ii)*. □

Per la Proposizione 3.3, ogni elemento di uno spazio di Hilbert è univocamente determinato dai suoi prodotti scalari con gli elementi di una b.o.n. (purché ne esista una). Tali numeri sono detti *coefficienti di Fourier* di $x \in X$.

Esempio 3.4. Una b.o.n. di ℓ^2 è formata dalle successioni e_k definite da

$$e_k = (\delta_{j,k})_{j=1}^{\infty}.$$

Infatti, chiaramente si ha per ogni $h, k \in \mathbb{N}$

$$\langle e_h, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{h,j}\delta_{j,k} = \delta_{h,k}.$$

Inoltre, per ogni $x \in \ell^2$ si ha

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Esempio 3.5. Costruiamo una b.o.n. di $L^2(0, 2\pi)$ usando le funzioni (fig. 4)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \ (k \in \mathbb{N}).$$

Infatti, per ogni $h \neq k$ si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(hx)}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\, dx &= \Big[\frac{\sin(hx)}{h\sqrt{\pi}} \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\sin(hx)}{h\sqrt{\pi}} \frac{k\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}\, dx \\ &= \Big[-\frac{\cos(hx)}{h^2\sqrt{\pi}} \frac{k\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(hx)}{h^2\sqrt{\pi}} \frac{k^2\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\, dx \\ &= \frac{h^2}{k^2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(hx)}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\, dx,\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(hx)}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\, dx = 0.$$

D'altra parte, per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} \Big(\frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\Big)^2 dx = \Big[\frac{kx + \cos(kx)\sin(kx)}{2k\pi}\Big]_0^{2\pi} = 1.$$

Gli altri prodotti si calcolano in modo simile, verificando infine la Definizione 3.1 *(i)*. Per provare *(ii)* è sufficiente osservare che $L^2(0, 2\pi)$ è separabile e procedere come nel Teorema 3.2. Così, dalla Proposizione 3.3 segue che per ogni $u \in L^2(0, 2\pi)$ esistono successioni (a_k), (b_k) in $\mathbb{R}$ t.c.

$$u(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}\Big).$$

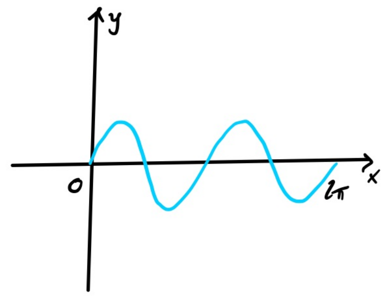

FIGURA 4. Un elemento della b.o.n.

L'eguaglianza sopra vale in $L^2(0, 2\pi)$, dunque è da considerarsi valida per *quasi ogni* $x \in (0, 2\pi)$ (per il problema della convergenza puntuale o uniforme delle serie di Fourier ved. [9, p. 91]).

Osservazione 3.6. Dal Teorema 3.2 e dalla Proposizione 3.3 segue una sorprendente informazione: *ogni spazio di Hilbert separabile, di dimensione infinita, è linearmente isometrico a* ℓ^2. Tuttavia, questa relazione è di scarsa utilità in quanto la rappresentazione degli elementi e degli operatori di uno spazio di Hilbert mediante serie è in generale molto complessa.

Esercizio 3.7. Siano X uno spazio di Hilbert, (e_k) una b.o.n., $x \in X$ t.c. $x \perp e_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dimostrare che $x = 0$.

Esercizio 3.8. Completare la dimostrazione dell'Esempio 3.5.

4. Operatori lineari fra spazi di Hilbert

In questa sezione introduciamo alcune definizioni e notazioni relative agli operatori lineari (continui o meno) fra due spazi di Hilbert X, Y. La maggior parte delle nozioni qui ricordate si estendono, con opportuni adattamenti, al caso in cui X e Y sono spazi di Banach (ved. [2, Chapter 6]). Per approfondimenti rimandiamo a [4]. Denoteremo $L(X, Y)$ l'insieme di tutti gli operatori lineari $A : X \to Y$, che è anch'esso uno spazio vettoriale con le operazioni definite puntualmente, e porremo $L(X) = L(X, X)$[9]. Per ogni $A \in L(X, Y)$ poniamo

$$\ker(A) = \{x \in X : A(x) = 0\}, \ \operatorname{im}(A) = \{A(x) : x \in X\},$$
$$\operatorname{gr}(A) = \{(x, A(x)) : x \in X\}.$$

Definizione 4.1. *Siano X, Y spazi di Hilbert. Un operatore $A \in L(X, Y)$ è detto continuo se verifica una delle seguenti condizioni equivalenti:*

- (i) *esiste $C > 0$ t.c. $\|A(x)\| \leqslant C\|x\|$ per ogni $x \in X$;*
- (ii) *$A(S)$ è limitato in Y per ogni $S \subset X$ limitato;*
- (iii) *$A : X \to Y$ è una mappa continua (rispetto alle topologie forti di X, Y);*
- (iv) *$A : X \to Y$ è una mappa continua (rispetto alle topologie deboli di X, Y).*

L'insieme degli operatori lineari continui da X in Y è denotato $\mathcal{L}(X, Y)$ ed è uno spazio di Banach con la norma

$$\|A\| = \sup_{x \in X, \, \|x\| \leqslant 1} \|A(x)\|.$$

[9] Analoghe abbreviazioni saranno usate nel seguito, per esempio $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.

Chiaramente $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. Dalla Definizione 4.1 deduciamo che un operatore lineare è continuo se e solo se è *localmente limitato*, ed è continuo in ogni punto se e solo se lo è in 0. Se $\dim(X) < \infty$, per ogni altro spazio Y si ha $L(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$, in altre parole la continuità degli operatori lineari è un tema degno di studio solo negli spazi di dimensione infinita.

Il seguente risultato, dovuto a Banach, prova che un operatore lineare continuo è anche *aperto* (ovvero manda aperti in aperti):

Teorema 4.2. (della mappa aperta) *Siano X, Y spazi di Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ suriettivo. Allora esiste $r > 0$ t.c.*

$$B_r^Y \subseteq A(B_1^X)\text{[10]}.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$K = \overline{A(B_1^X)},$$

sottoinsieme convesso, chiuso e simmetrico di Y t.c.

$$K + K = 2K.$$

Posto $K_n = nK$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per suriettività di A si ha

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = Y,$$

da cui per il Teorema di Baire [2, Theorem 2.1] esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\mathrm{int}(K_n) \neq \emptyset$, ovvero esistono $u \in Y$, $\rho > 0$ t.c. $B_\rho^Y(u) \subseteq K_n$. Pertanto si ha

$$B_{\rho/n}^Y\Big(\frac{u}{n}\Big) \subseteq K.$$

Infatti, per ogni $v \in B_{\rho/n}^Y(u/n)$ si ha $nv \in B_\rho^Y(u) \subseteq K_n$, da cui $v \in K$. Si ha dunque $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$, ovvero esistono $y_0 \in Y$, $r > 0$ t.c.

$$B_{6r}^Y(y_0) \subseteq K.$$

In particolare, $y_0 \in K$, e per simmetria $-y_0 \in K$. Sommando, otteniamo

$$B_{6r}^Y \subseteq K + K = 2K,$$

ovvero

$$B_{3r}^Y \subseteq K. \tag{4.1}$$

Fissiamo ora $y \in B_r^Y$. Per (4.1) abbiamo $3y \in K$, dunque esiste $z_1 \in B_1^X$ t.c. $\|3y - A(z_1)\| < r$, ovvero

$$\Big\|y - A\Big(\frac{z_1}{3}\Big)\Big\| < \frac{r}{3}.$$

Sempre per (4.1) abbiamo $9y - 3A(z_1) \in K$, dunque esiste $z_2 \in B_1^X$ t.c. $\|(9y - 3A(z_1)) - A(z_2)\| < r$, ovvero

$$\Big\|y - A\Big(\frac{z_1}{3} + \frac{z_2}{9}\Big)\Big\| < \frac{r}{9}.$$

Così continuando, costruiamo una successione $(z_n) \subset B_1^X$ t.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\Big\|y - A\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{3^k}\Big)\Big\| < \frac{r}{3^n}.$$

Poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{3^k}.$$

[10]Denotiamo B_r^X, B_r^Y le palle di raggio $r > 0$ in X, Y rispettivamente.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n > m \geqslant \nu$

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{3^k} < \varepsilon,$$

ovvero (x_n) è una successione di Cauchy. Per completezza di X, abbiamo $x_n \to x$ in X. Ne segue, passando al limite nella relazione precedente,

$$\|y - A(x)\| = \lim_n \|y - A(x_n)\| = 0,$$

cioè $y = A(x)$. Inoltre

$$\|x\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2} < 1,$$

dunque $y \in A(B_1^X)$. □

Osservazione 4.3. Il Teorema 4.2 vale anche per spazi di Banach (ved. [2, Theorem 2.6]). Una sua importante conseguenza è che, se $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ è biunivoco, allora A^{-1} è *continuo*.

Ricordiamo la seguente nozione:

Definizione 4.4. *Siano X, Y spazi di Hilbert, $A \in L(X,Y)$: A è detto chiuso se* $\mathrm{gr}(A) \subset X \times Y$ *è chiuso.*

Ovviamente, ogni operatore (anche non lineare) continuo è anche chiuso. Per gli operatori lineari, l'implicazione si inverte:

Teorema 4.5. (del grafico chiuso) *Siano X, Y spazi di Hilbert, $A \in L(X,Y)$ chiuso. Allora $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ poniamo

$$\|x\|_A = \|x\|_X + \|A(x)\|_Y\text{[11]}$$

Si vede facilmente che $\|\cdot\|_A$ è una norma su X. Inoltre, sia (x_n) una successione di Cauchy in $(X, \|\cdot\|_A)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n, m \geqslant \nu$

$$\|x_n - x_m\|_A < \varepsilon.$$

Per completezza di X e Y, ne segue che $x_n \to x$ in X e $A(x_n) \to y$ in Y. Poiché $\mathrm{gr}(A)$ è chiuso si ha $y = A(x)$, da cui $\|x_n - x\|_A \to 0$. Dunque $(X, \|\cdot\|_A)$ è uno spazio di Banach. Consideriamo l'operatore identità $I(x) = x$ come un operatore lineare biunivoco fra $(X, \|\cdot\|_A)$ e $(X, \|\cdot\|_X)$, ovviamente continuo in quanto per ogni $x \in X$

$$\|x\|_X \leqslant \|x\|_A.$$

Per l'Osservazione 4.3, $I^{-1} = I$ è continuo, ovvero esiste $C > 0$ t.c. per ogni $x \in X$

$$\|x\|_A \leqslant C\|x\|_X.$$

Dunque A è continuo (Definizione 4.1). □

Un'altra nozione strettamente legata alla dimensione di uno spazio è quella di *compattezza*:

Definizione 4.6. *Siano X, Y spazi di Hilbert. Un operatore $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ è detto compatto se l'insieme $\overline{A(B_1^X)} \subset Y$ è compatto. L'insieme degli operatori lineari compatti è denotato $\mathcal{K}(X,Y)$.*

[11]In questo caso denotiamo $\|\cdot\|_X$ la norma di X e $\|\cdot\|_Y$ la norma di Y.

Chiaramente, per linearità di A, la Definizione 4.6 è equivalente alla condizione che $\overline{A(S)}$ sia compatto per ogni $S \subset X$ limitato. In questo caso è determinante la topologia dello spazio di arrivo: se $\dim(Y) < \infty$, allora $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{K}(X,Y)$. Più in generale, diremo che $A \in L(X,Y)$ è di *rango finito* se $\dim(\mathrm{im}(A)) < \infty$:

Lemma 4.7. *Siano X, Y spazi di Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ di rango finito. Allora $A \in \mathcal{K}(X,Y)$.*

Dimostrazione. Sia $\dim(\mathrm{im}(A)) = N$. L'insieme $A(B_1^X)$ è limitato e contenuto in $\mathrm{im}(A)$, che è isomorfo a $\mathbb{R}^N$, quindi $A(B_1^X)$ è relativamente compatto. □

Lemma 4.8. *Siano X, Y spazi di Hilbert. Allora $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ è un sottospazio chiuso.*

Dimostrazione. Ovviamente $\mathcal{K}(X,Y)$ è uno spazio vettoriale. Per provare che esso è chiuso, consideriamo una successione (A_n) in $\mathcal{K}(X,Y)$ t.c. $A_n \to A$ in $\mathcal{L}(X,Y)$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\|A_n - A\| < \varepsilon/2$. L'insieme $A_n(B_1^X)$ è relativamente compatto, quindi *totalmente limitato*: esistono $m \in \mathbb{N}$, $y_1, \dots y_m \in Y$ t.c.

$$A_n(B_1^X) \subset \bigcup_{j=1}^m B^Y_{\varepsilon/2}(y_j).$$

Per ogni $x \in B_1^X$, si ha

$$\|A_n(x) - A(x)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

inoltre esiste $j \in \{1, \dots m\}$ t.c.

$$\|A_n(x) - y_j\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

da cui

$$\|A(x) - y_j\| < \varepsilon.$$

In sintesi abbiamo

$$A(B_1^X) \subset \bigcup_{j=1}^m B^Y_{\varepsilon}(y_j).$$

Dunque $A(B_1^X)$ è relativamente compatto, ovvero $A \in \mathcal{K}(X,Y)$. □

Osservazione 4.9. Dai Lemmi 4.7, 4.8 segue che, se (A_n) è una successione di operatori di rango finito in $\mathcal{L}(X,Y)$ t.c. $A_n \to A$, allora $A \in \mathcal{K}(X,Y)$. Vale anche l'inverso, ovvero ogni operatore compatto fra due spazi di Hilbert è approssimabile con una successione di operatori di rango finito (ved. [2, p. 158]). Questa proprietà, di fondamentale importanza nella teoria del *grado topologico*, non si estende in generale agli spazi di Banach.

Lemma 4.10. *Siano X, Y, Z spazi di Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$ t.c. almeno uno fra A e B è compatto. Allora $B \circ A \in \mathcal{K}(X,Z)$.*

Dimostrazione. Chiaramente $B \circ A \in \mathcal{L}(X,Z)$. Supponiamo che $A \in \mathcal{K}(X,Y)$, allora $A(B_1^X) \subset Y$ è relativamente compatto. Poiché B è continuo, ne segue che $B(A(B_1^X)) \subset Z$ è relativamente compatto.

Similmente si procede se $B \in \mathcal{K}(X,Y)$. □

Osservazione 4.11. La nozione di compattezza di un operatore suggerisce che la palla unitaria B_1^X, in generale non compatta, si possa proiettare in un altro spazio Y dove essa risulta compatta (perché Y è 'più grande' di X, o meglio ha una topologia meno fine). Questa idea è alla base della teoria delle *immersioni compatte*, sviluppata soprattutto negli spazi di Sobolev (ved. [6]).

Passiamo ora allo studio degli operatori lineari *discontinui*. Nelle applicazioni, lo studio di un operatore discontinuo è spesso collegato alla scelta di 'immergere' il dominio di un operatore dato in uno spazio più grande con migliori proprietà funzionali (per esempio il *completamento* del dominio rispetto a una certa norma). Consideriamo dunque operatori lineari del tipo

$$A : D(A) \subseteq X \to Y,$$

dove X, Y sono spazi di Hilbert (o, più generalmente, spazi di Banach) e $D(A)$ è un sottospazio (non necessariamente chiuso) di X. Se $D(A) \subseteq X$ è denso, diremo che A è *densamente definito* in X. Ogni operatore A densamente definito induce un altro operatore, $A^* : D(A^*) \subseteq Y \to X$ detto *aggiunto* di A[12], attraverso la seguente costruzione: poniamo

$$D(A^*) = \big\{y \in Y : \text{esiste } C > 0 \text{ t.c. } |\langle y, A(x)\rangle| \leqslant C\|x\| \text{ per ogni } x \in D(A)\big\}.$$

Chiaramente $D(A^*)$ è un sottospazio di Y. Poniamo per ogni $y \in D(A^*)$, $x \in D(A)$

$$\langle \widetilde{A}(y), x\rangle = \langle y, A(x)\rangle,$$

così che $\widetilde{A}(y) \in L(D(A), \mathbb{R})$. Inoltre, poiché $y \in D(A^*)$ si ha per un'opportuna costante $C > 0$ e ogni $x \in D(A)$

$$|\langle \widetilde{A}(y), x\rangle| \leqslant C\|x\|.$$

La funzione $x \mapsto C\|x\|$ è una semi-norma su X, quindi il Teorema di Hahn-Banach [2, Theorem 1.1] garantisce l'esistenza di un funzionale $\varphi \in L(X, \mathbb{R})$ t.c.

$$\begin{cases} \varphi(x) = \langle \widetilde{A}(y), x\rangle & \text{per ogni } x \in D(A) \\ |\varphi(x)| \leqslant C\|x\| & \text{per ogni } x \in X. \end{cases}$$

Dalla seconda relazione deduciamo $\varphi \in X^*$. Dalla prima relazione, ricordando che $\overline{D(A)} = X$, deduciamo che φ è *unico*. Per il Teorema 1.13, φ ammette un unico rappresentante $A^*(y) \in X$. Chiaramente, la mappa $A^* : D(A^*) \subseteq Y \to X$ così definita è lineare.

Definizione 4.12. *Siano X, Y spazi di Hilbert, $A : D(A) \subseteq X \to Y$ un operatore lineare densamente definito. L'operatore $A^* : D(A^*) \subseteq Y \to X$ definito sopra è detto aggiunto di A e verifica per ogni $x \in D(A)$, $y \in D(A^*)$*

$$\langle y, A(x)\rangle = \langle A^*(y), x\rangle. \tag{4.2}$$

Il seguente risultato descrive il 'caso continuo':

Proposizione 4.13. *Siano X, Y spazi di Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Allora, $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ con $\|A^*\| = \|A\|$.*

Dimostrazione. Da (4.2) segue per ogni $y \in Y$, $x \in X$

$$|\langle A^*(y), x\rangle| = |\langle y, A(x)\rangle| \leqslant \|A\|\|y\|\|x\|,$$

dunque $\|A^*(y)\| \leqslant \|A\|\|y\|$, che a sua volta implica

$$\|A^*\| = \sup_{y\in Y,\, \|y\|\leqslant 1} \|A^*(y)\| \leqslant \|A\|.$$

Similmente si dimostra che $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. □

[12] Presentiamo qui la costruzione per gli spazi di Hilbert: in generale, se X, Y sono spazi di Banach si ha $A^* : D(A^*) \subseteq Y^* \to X^*$, ved. [2, p. 43].

La Proposizione 4.13 permette di replicare la costruzione: per ogni $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ si ha $A^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ e da questo si ricava $A^{**} \in \mathcal{L}(X,Y)$ (tutti con la stessa norma). Inoltre, applicando (4.2) si ha per ogni $x \in X$

$$A^{**}(x) = A(x). \tag{4.3}$$

Il prossimo risultato assicura che l'aggiunto di un operatore compatto è compatto:

Teorema 4.14. (Schauder) *Siano X, Y spazi di Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) $A \in \mathcal{K}(X,Y)$;
(ii) $A^* \in \mathcal{K}(Y,X)$.

Dimostrazione. Proviamo che *(i)* implica *(ii)*. Sia (y_n) una successione in Y t.c. $\|y_n\| \leqslant 1$: dimostriamo che $(A^*(y_n))$ ha una sottosuccessione convergente in X. Poniamo $K = \overline{A(B_1^X)}$ e definiamo una successione (f_n) di funzioni definite su K ponendo per ogni $z \in K$, $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(z) = \langle y_n, z\rangle.$$

Allora K è uno spazio metrico compatto *(i)* e la successione (f_n) è equi-limitata ed equi-continua. Infatti, per ogni $z_1, z_2 \in K$ si ha

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\|\|z_1 - z_2\| \leqslant \|z_1 - z_2\|$$

(le funzioni f_n sono tutte lipschitziane con la stessa costante 1). Per il Teorema di Ascoli-Arzelà [2, Theorem 4.25], passando a una sottosuccessione si ha $f_n \to f$ in $C(K)$. In particolare, (f_n) è una successione di Cauchy in $C(K)$. Dunque, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ abbastanza grandi si ha

$$\begin{aligned}
\|A^*(y_m) - A^*(y_n)\| &= \sup_{x\in B_1^X} \big|\langle A^*(y_m) - A^*(y_n), x\rangle\big| \\
&= \sup_{x\in B_1^X} \big|\langle y_m - y_n, A(x)\rangle\big| \\
&\leqslant \sup_{z\in K} |f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pertanto, anche $(A^*(y_n))$ è una successione di Cauchy, e per completezza di X essa è convergente.
Proviamo che *(ii)* implica *(i)*. Da *(ii)*, ragionando come sopra, si deduce che $A^{**} \in \mathcal{K}(X,Y)$. Per (4.3) abbiamo dunque $A \in \mathcal{K}(X,Y)$[13]. □

Ma è nel 'caso discontinuo' che la teoria diventa delicata. Cominciamo con due proprietà di regolarità per un operatore e il suo aggiunto:

Lemma 4.15. *Siano X, Y spazi di Hilbert, $A : D(A) \subset X \to Y$ un operatore lineare densamente definito e chiuso. Allora $D(A^*) \subset Y$ è denso.*

Dimostrazione. Ricordando l'Esercizio 1.22, la tesi si riformula come segue:

$$D(A^*)^\perp = \{0\}.$$

Ragionando per assurdo, supponiamo che esista $y \in D(A^*)^\perp \setminus \{0\}$. Allora $(0, y) \notin \mathrm{gr}(A)$, e questo insieme è chiuso e convesso in $X \times Y$. Per il Teorema di Hahn-Banach [2, Theorem 1.7], esistono $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$, $c \in \mathbb{R}$ t.c. per ogni $x \in D(A)$

$$\langle \bar{x}, x\rangle + \langle \bar{y}, A(x)\rangle < c < \langle \bar{y}, y\rangle.$$

[13]Useremo spesso (4.3) in questo modo.

Poiché $D(A)$ è un sottospazio, ne segue che per ogni $x \in D(A)$

$$\langle \bar{y}, A(x) \rangle = -\langle \bar{x}, x \rangle \leqslant \|\bar{x}\| \|x\|.$$

Dunque $\bar{y} \in D(A^*)$. D'altra parte, dalla diseguaglianza precedente segue $c > 0$, dunque

$$\langle \bar{y}, y \rangle > 0,$$

assurdo. □

Per il Lemma 4.15, se A è densamente definito e chiuso, anche A^* è densamente definito, quindi si può definire $A^{**} : D(A^{**}) \subseteq X \to Y$. Come in (4.3), inoltre, si ha l'identificazione $A^{**} = A$.
Fra un operatore e il suo aggiunto valgono alcune importanti relazioni di ortogonalità:

Proposizione 4.16. *Siano X, Y spazi di Hilbert, $A : D(A) \subseteq X \to Y$ un operatore lineare densamente definito e chiuso. Allora:*
- *(i) $\ker(A) = \mathrm{im}(A^*)^\perp$;*
- *(ii) $\ker(A^*) = \mathrm{im}(A)^\perp$;*
- *(iii) $\ker(A)^\perp = \overline{\mathrm{im}(A^*)}$;*
- *(iv) $\ker(A^*)^\perp = \overline{\mathrm{im}(A)}$.*

Dimostrazione. Proviamo *(i)*. Fissati $x \in \ker(A)$, $y \in D(A^*)$, per (4.2) si ha

$$\langle A^*(y), x \rangle = \langle y, A(x) \rangle = \langle y, 0 \rangle = 0,$$

da cui $x \in \mathrm{im}(A^*)^\perp$. Viceversa, fissati $x \in \mathrm{im}(A^*)^\perp$, $y \in D(A^*)$, si ha

$$\langle y, A(x) \rangle = \langle A^*(y), x \rangle = 0,$$

quindi $A(x) \in D(A^*)^\perp$. Per il Lemma 4.15 $D(A^*) \subseteq Y$ è denso, quindi si ha $A(x) = 0$ (Esercizio 1.22) e pertanto $x \in \ker(A)$.
Similmente si prova *(ii)*. Per ogni $y \in \ker(A^*)$, $x \in D(A)$ si ha

$$\langle y, A(x) \rangle = \langle A^*(y), x \rangle = \langle 0, x \rangle = 0,$$

da cui $y \in \mathrm{im}(A)^\perp$. Viceversa, fissati $y \in \mathrm{im}(A)^\perp$, $x \in D(A)$ si ha

$$\langle y, A(x) \rangle = 0,$$

ovvero $y \in D(A^*)$ e $A^*(y) \in D(A)^\perp$. Poiché $D(A)$ è denso, $A^*(y) = 0$, ovvero $y \in \ker(A^*)$.
Da *(i)* e dal Lemma 1.14 segue

$$\ker(A)^\perp = (\mathrm{im}(A^*)^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{im}(A^*)},$$

cioè *(iii)*. Similmente, da *(ii)* segue *(iv)*. □

Il seguente esempio illustra una tipica situazione in cui conviene 'estendere' un operatore lineare dal suo dominio naturale a uno spazio più grande, e dotato di proprietà migliori:

Esempio 4.17. Lo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R})$, formato dalle funzioni derivabili infinite volte e a supporto compatto in $\mathbb{R}$, è un sottospazio denso di $L^2(\mathbb{R})$ (ved. [2, Corollary 4.23]). Definiamo un operatore lineare $A : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ponendo $A(u) = u'$. Si può dimostrare che A è chiuso. Per il Teorema 1.13 possiamo definire l'aggiunto $A^* : D(A^*) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ponendo

$$D(A^*) = \Big\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) : \Big| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) u'(x)\, dx \Big| \leqslant C\|u\|_2 \text{ per ogni } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \Big\},$$

e per ogni $\varphi \in D(A^*)$, $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\langle A^*(\varphi), u \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) u'(x)\, dx.$$

Chiaramente $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq D(A^*)$, e per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, determinati due numeri reali $a < b$ t.c. $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [a,b]$, abbiamo

$$\begin{aligned}\langle A^*(\varphi), u\rangle &= \int_a^b \varphi(x)u'(x)\,dx \\ &= \big[\varphi(x)u(x)\big]_a^b - \int_a^b \varphi'(x)u(x)\,dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)u(x)\,dx.\end{aligned}$$

Così si può porre $A^*(\varphi) = -\varphi'$. Forzando la definizione, possiamo affermare che $A^* = -A$.

Concludiamo questa sezione ricordando due definizioni basate sul Teorema 1.13:

Definizione 4.18. *Siano X uno spazio di Hilbert, $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare: A è*

(*i*) *simmetrico se $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle$ per ogni $x, y \in D(A)$;*
(*ii*) *autoaggiunto se $D(A) = D(A^*)$ e A è simmetrico.*

Dalla Definizione 4.18 e da 4.2 si deduce che un operatore $A \in \mathcal{L}(X)$ è autoaggiunto se e solo se $A = A^*$.

Esercizio 4.19. Dimostrare che le condizioni della Definizione 4.1 sono equivalenti.

Esercizio 4.20. Dimostrare che la norma di $\mathcal{L}(X,Y)$ introdotta nella Definizione 4.1 coincide con le seguenti:

$$\|A\| = \sup_{x \in \partial B_1^X} \|A(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}.$$

Esercizio 4.21. Siano X, Y spazi di Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dimostrare che $\ker(A)$ è un sottospazio chiuso di X. E $\operatorname{im}(A)$?

Esercizio 4.22. Dimostrare le proprietà dell'insieme K nella dimostrazione del Teorema 4.2.

Esercizio 4.23. Dimostrare l'Osservazione 4.3.

Esercizio 4.24. Siano X, Y spazi di Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ biunivoco. Dimostrare che $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

Esercizio 4.25. Siano $(X, \|\cdot\|_1)$ uno spazio di Hilbert, $\|\cdot\|_2$ una norma su X t.c. $(X, \|\cdot\|_2)$ è uno spazio di Hilbert ed esiste $C > 0$ t.c. $\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2$ per ogni $x \in X$. Dimostrare che esiste anche $C' > 0$ t.c. $\|x\|_2 \leqslant C'\|x\|_1$ per ogni $x \in X$ (ovvero, che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono equivalenti).

Esercizio 4.26. Dimostrare il Lemma 4.10 nel caso $B \in \mathcal{K}(Y,Z)$.

Esercizio 4.27. Completare la diostrazione della Proposizione 4.13.

Esercizio 4.28. Dimostrare (4.3).

Esercizio 4.29. Dimostrare le proprietà (*ii*) - (*iv*) della Proposizione 4.16.

Esercizio 4.30. Quali risultati di questa sezione rimangono validi se X, Y sono 'soltanto' spazi di Banach riflessivi?

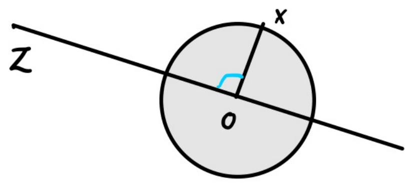

Figura 5.

5. Teoria di Riesz-Fredholm

Questa sezione è dedicata allo studio di una classe di *equazioni funzionali* imperniate su perturbazioni compatte dell'identità, ovvero equazioni della forma

$$x - A(x) = y, \tag{5.1}$$

dove X è uno spazio di Hilbert, $A \in \mathcal{K}(X)$, e $y \in X$. L'equazione (5.1) costituisce il modello di molte equazioni differenziali, e per questo è importante studiarne la risolubilità al variare del 'termine noto' $y \in X$. Osserviamo che i risultati seguenti sono validi anche in spazi di Banach (con opportuni adattamenti e usando il Lemma di Riesz [2, Lemma 6.1]). Per approfondimenti rimandiamo specialmente a [1].

Cominciamo con una proprietà metrica (fig. 5): siano X uno spazio di Hilbert, $Z \subset X$ un sottospazio chiuso, $x \in \partial B_1 \cap Z^\perp$, allora

$$\mathrm{dist}(x, Z) = 1. \tag{5.2}$$

Infatti, per ogni $z \in Z$ si ha

$$\langle x, z \rangle = 0,$$

da cui per la Proposizione 2.3 segue $\Pi_Z(x) = 0$. Mediante questa proprietà possiamo caratterizzare gli spazi di Hilbert di dimensione finita:

Teorema 5.1. *Sia X uno spazio di Hilbert. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*
- *(i)* $\dim(X) < \infty$,
- *(ii)* $\overline{B}_1$ *è compatto.*

Dimostrazione. Dall'analisi elementare sappiamo che *(i)* implica *(ii)*.

Proviamo che *(ii)* implica *(i)*, per assurdo: sia (Z_n) una successione di sottospazi chiusi di X, t.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\dim(Z_n) < \infty$ e $Z_n \subset Z_{n+1}$. Per ogni $n \geqslant 2$ scegliamo $x_n \in \partial B_1 \cap Z_n \cap Z_{n-1}^\perp$, così che per (5.2) si ha

$$\mathrm{dist}(x_n, Z_{n-1}) = 1.$$

In particolare, sbbiamo $\|x_n - x_{n-1}\| \geqslant 1$ per ogni $n \geqslant 2$, dunque (x_n) è una successione in $\overline{B}_1$ priva di sottosuccessioni convergenti, contro *(ii)*. □

Nel seguito denoteremo con I l'operatore identità di X (osserviamo che $I^* = I$). Il risultato fondamentale di questa teoria è contenuto nella seguente, alquanto tecnica, proposizione:

Proposizione 5.2. *Siano X uno spazio di Hilbert, $A \in \mathcal{K}(X)$. Allora:*
- *(i)* $\dim(\ker(I - A)) < \infty$;
- *(ii)* $\mathrm{im}(I - A) = \ker(I - A^*)^\perp$ *è chiuso;*
- *(iii)* $\ker(I - A) = \{0\}$ *se e solo se* $\mathrm{im}(I - A) = X$;

(*iv*) $\dim(\ker(I - A^*)) = \dim(\ker(I - A))$.

Dimostrazione. Proviamo (*i*). Poniamo $Z = \ker(I - A)$, sottospazio chiuso di X, e osserviamo che

$$B_1^Z \subseteq A(B_1).$$

Infatti, per ogni $z \in B_1^Z = B_1 \cap Z$ si ha $z = A(z)$ e quindi $z \in A(B_1)$. Poiché $A \in \mathcal{K}(X)$, B_1^Z è relativamente compatto. Per il Teorema 5.1 ne segue $\dim(Z) < \infty$.

Proviamo (*ii*). Per la Proposizione 4.16 (*iv*), osservando che $(I - A)^* = I - A^*$, si ha

$$\overline{\mathrm{im}(I - A)} = \ker(I - A^*)^{\perp}.$$

D'altra parte, osserviamo che $\mathrm{im}(I - A)$ è chiuso. Infatti, siano (x_n) una successione in X, $y_n = x_n - A(x_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, t.c. $y_n \to y$: dimostriamo che $y \in \mathrm{im}(I - A)$. Sia $d_n = \mathrm{dist}(x_n, Z)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e (passando se necessario a una sottosuccessione) si ha $d_n > 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ determiniamo $z_n \in Z$ t.c. $\|x_n - z_n\| = d_n$. Si ha allora

$$y_n = (x_n - z_n) - A(x_n - z_n). \tag{5.3}$$

La successione $(x_n - z_n)$ è limitata. Altrimenti, passando a una sottosuccessione si avrebbe $d_n \to \infty$, e quindi, posto $w_n = (x_n - z_n)/d_n \in \partial B_1$, per (5.3) si avrebbe

$$w_n - A(w_n) = \frac{y_n}{d_n} \to 0.$$

Poiché $A \in \mathcal{K}(X)$, sempre a meno di una sottosuccessione possiamo assumere $A(w_n) \to w$, da cui per la relazione sopra anche $w_n \to w$ e $w \in Z$. D'altra parte, abbiamo

$$\mathrm{dist}(w_n, Z) = \inf_{z \in Z} \|w_n - z\| = \inf_{z \in Z} \frac{\|x_n - z\|}{d_n} = 1,$$

assurdo. Dunque, poiché $(x_n - z_n)$ è limitata e $A \in \mathcal{K}(X)$, passando a una sottosuccessione abbiamo $A(x_n - z_n) \to v$. Usando (5.3) deduciamo $x_n - z_n \to y + v$, da cui

$$(y + v) - A(y + v) = \lim_n \big((x_n - z_n) - A(x_n - z_n)\big) = \lim_n y_n = y,$$

ovvero $y \in \mathrm{im}(I - A)$. Dunque abbiamo

$$\mathrm{im}(I - A) = \ker(I - A^*)^{\perp}.$$

Proviamo (*iii*). Dapprima assumiamo che $\ker(I - A) = \{0\}$ e dimostriamo che $\mathrm{im}(I - A) = X$. Per assurdo, supponiamo che $Y_1 = \mathrm{im}(I - A)$ sia un sottospazio proprio di X, chiuso per (*ii*). Allora si ha $A(Y_1) \subseteq Y_1$. Poniamo $Y_2 = (I - A)(Y_1)$ e osserviamo che $Y_2 \subset Y_1$ (propriamente). Infatti, scelto $x \in X \setminus Y_1$, si ha $x - A(x) \in Y_1 \setminus Y_2$ (per iniettività di $I - A$). Così continuando, costruiamo una successione (Y_n) di sottospazi chiusi di X, legati dalle relazioni

$$Y_{n+1} = (I - A)(Y_n) \subset Y_n$$

(con inclusione propria). Applicando (5.2), per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo trovare $x_n \in Y_n \cap \partial B_1$ t.c. $\mathrm{dist}(x_n, Y_{n+1}) = 1$. Per ogni $m > n$ si ha pertanto $x_m, x_m - A(x_m), x_n - A(x_n) \in Y_{n+1}$ da cui

$$\begin{aligned} \|A(x_m) - A(x_n)\| &= \|(x_n - A(x_n)) - (x_m - A(x_m)) + x_m - x_n\| \\ &\geqslant \mathrm{dist}(x_n, Y_{n+1}) = 1, \end{aligned}$$

ovvero (x_n) è una successione limitata e $(A(x_n))$ non ha sottosuccessioni convergenti, contro l'ipotesi che $A \in \mathcal{K}(X)$.

Viceversa, supponiamo che $\mathrm{im}(I - A) = X$. Per la Proposizione 4.16 (*ii*) si ha

$$\ker(I - A^*) = \mathrm{im}(I - A)^{\perp} = \{0\}.$$

Ricordiamo che $A^* \in \mathcal{K}(X)$ (Teorema 4.14). Pertanto possiamo applicare l'implicazione precedente e dedurre $\mathrm{im}(I - A^*) = X$, da cui per la Proposizione 4.16 *(i)*

$$\ker(I - A) = \mathrm{im}(I - A^*)^\perp = \{0\}.$$

Proviamo infine *(iv)*. Ricordiamo che $Z = \ker(I - A)$ soddisfa per *(i)*

$$\dim(Z) = d < \infty.$$

Per il Teorema 4.14 abbiamo $A^* \in \mathcal{K}(X)$. Pertanto, posto $W = \ker(I - A^*)$, sempre per *(i)* abbiamo

$$\dim(W) = d^* < \infty.$$

Procediamo per assurdo, supponendo $d < d^*$. Allora esiste un operatore $B \in \mathcal{K}(Z, W)$ iniettivo non suriettivo. D'altra parte, per *(ii)* abbiamo

$$\mathrm{im}(I - A) = W^\perp,$$

da cui

$$X = \mathrm{im}(I - A) \oplus W. \tag{5.4}$$

Ricordiamo dalla Sezione 1 che esiste una proiezione metrica $\Pi_Z \in \mathcal{L}(X, Z)$. Poniamo dunque per ogni $x \in X$

$$S(x) = A(x) + B(\Pi_Z(x)),$$

così che $S \in \mathcal{K}(X)$ (Lemmi 4.8, 4.7, 4.10). Proviamo che

$$\ker(I - S) = \{0\}. \tag{5.5}$$

Infatti, per ogni $x \in \ker(I - S)$ si ha

$$0 = x - S(x) = (x - A(x)) - B(\Pi_Z(x)) \in \mathrm{im}(I - A) \oplus W,$$

da cui (per (5.4)) segue $x - A(x) = B(\Pi_Z(x)) = 0$. Dunque $x \in Z$, da cui $B(x) = B(\Pi_Z(x)) = 0$. Per iniettività di B, si ha $x = 0$. Da (5.5) e *(iii)* (applicata all'operatore S) segue che $\mathrm{im}(I - S) = X$. Poiché B non è suriettivo, esiste $w \in W \setminus \mathrm{im}(B)$, per il quale troviamo $x \in X$ t.c.

$$w = x - S(x) = (x - A(x)) - B(\Pi_Z(x)).$$

Ricordando che $w \notin \mathrm{im}(B)$, si ha

$$x - A(x) = w + B(\Pi_Z(x)) \in W \setminus \{0\},$$

contro (5.4). Così abbiamo provato che $d^* \leqslant d$. D'altra parte, applicando questa diseguaglianza all'operatore $A^{**} \in \mathcal{K}(X)$ e ricordando (4.3), si ha

$$d = \dim(\mathrm{im}(I - A^{**})) \leqslant d^* \leqslant d,$$

da cui infine $d = d^*$. Questo conclude la dimostrazione. □

Il senso della Proposizione 5.2 è il seguente: in uno spazio di dimensione infinita, un operatore *compatto* conserva alcune proprietà elementari del caso finito-dimensionale. In particolare, *(iii)* afferma che l'operatore $I - A$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.

Ciò conduce, nello studio dell'equazione (5.1), a un'alternativa:

Teorema 5.3. (di alternativa di Fredholm) *Siano X uno spazio di Hilbert, $A \in \mathcal{K}(X)$. Allora una sola delle seguenti affermazioni è vera:*

- *(i) per ogni $y \in X$, (5.1) ha un'unica soluzione in X;*
- *(ii) esistono $d \in \mathbb{N}_0$ e un sottospazio $Y \subseteq X^*$ t.c. $\dim(Y) = d$, per $y = 0$ (5.1) ha esattamente d soluzioni linearmente indipendenti in X, e per ogni $y \in X$ (5.1) ha soluzione se e solo se $y \in Y^\perp$.*

Dimostrazione. Applichiamo la Proposizione 5.2 (i), ponendo

$$d = \dim(\ker(I - A)) \in \mathbb{N},$$

e distinguiamo due casi:

(a) se $d = 0$, per la Proposizione 5.2 (iii) l'operatore $I - A$ è biunivoco, ovvero vale (i);

(b) se $d > 0$, allora $\ker(I - A)$ ha una base formata da d elementi, che sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea

$$x - A(x) = 0,$$

inoltre per la Proposizione 5.2 (iv), posto $Y = \ker(I - A^*)$, abbiamo $\dim(Y) = d$ e per la Proposizione 5.2 (ii) l'equazione (5.1) ha soluzione se e solo se $y \in Y^\perp$, ovvero vale (ii).

Ovviamente i casi (a), (b) sono incompatibili. □

Il Teorema 5.3 fornisce informazioni sulla risolubilità dell'equazione (5.1), al variare di $y \in Y$. In primo luogo, si risolve (5.1) nel caso omogeneo $y = 0$: se essa ammette solo la soluzione banale $x = 0$, allora per ogni altro dato $y \in X$ (5.1) avrà un'unica soluzione; se invece l'equazione omogenea ha soluzioni non banali, esse formano un sottospazio di dimensione finita d, e per ogni altro $y \in X$ (5.1) ammette soluzione in X se e solo se y soddisfa d condizioni di ortogonalità (dette *condizioni di compatibilità*). Per le applicazioni alle equazioni differenziali rimandiamo a [1, 2, 7].

Esercizio 5.4. Siano X uno spazio di Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X)$. Dimostrare che $(I - A)^* = I - A^*$.

Esercizio 5.5. Dimostrare il Teorema di alternativa di Fredholm per operatori lineari in $\mathbb{R}^N$.

Esercizio 5.6. Estendere la teoria di Riesz-Fredholm agli spazi di Banach.

6. Spettro di un operatore lineare

Dedichiamo quest'ultima sezione alle *proprietà spettrali* degli operatori fra spazi di Hilbert, ovvero allo studio dell'equazione funzionale

$$A(x) = \mu x, \tag{6.1}$$

dove X è uno spazio di Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X)$, e $\mu \in \mathbb{R}$ è un parametro. Chiaramente, per ogni $\mu \in \mathbb{R}$ l'equazione (6.1) ammette la soluzione banale $x = 0$. Siamo interessati a quei valori di μ t.c. (6.1) ha anche soluzioni non banali, e alla struttura di tali soluzioni. Cominciamo con alcune definizioni:

Definizione 6.1. *Siano X uno spazio di Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X)$:*

(i) *il risolvente di A è l'insieme*

$$\rho(A) = \big\{\mu \in \mathbb{R} : \ A - \mu I \ \text{è biunivoco}\big\};$$

(ii) *lo spettro di A è l'insieme $\sigma(A) = \mathbb{R} \setminus \rho(A)$;*

(iii) *un numero $\mu \in \mathbb{R}$ è detto autovalore di A se $A - \mu I$ non è iniettivo, in tal caso $\ker(A - \mu I)$ è l'autospazio associato a μ e ogni $x \in \ker(A - \mu I) \setminus \{0\}$ è un autovettore associato a μ.*

In altre parole, $\mu \in \mathbb{R}$ è un autovalore se (6.1) ammette soluzioni non banali in X, e in tal caso queste soluzioni formano un sottospazio di X. Le definizioni di $\rho(A)$ e $\sigma(A)$ invece sono collegate all'equazione non omogenea

$$A(x) - \mu x = y, \tag{6.2}$$

dove $y \in X$. Se $\mu \in \rho(A)$, (6.2) ha soluzione unica per ogni $y \in X$. Invece, se $\mu \in \sigma(A)$, esiste $y \in X$ t.c. (6.2) non ha soluzione o ne ha infinite. Introduciamo un primo risultato di struttura sullo spettro di un operatore:

Lemma 6.2. *Siano X uno spazio di Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X)$. Allora $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$ è compatto.*

Dimostrazione. Proviamo l'inclusione: sia $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > \|A\|$, allora $\mu \in \rho(A)$. Infatti, fissiamo $y \in X$ e poniamo per ogni $x \in X$

$$S(x) = \frac{A(x) - y}{\mu}.$$

Allora $S : X \to X$ è una contrazione, in quanto per ogni $x_1, x_2 \in X$ si ha

$$\|S(x_1) - S(x_2)\| \leqslant \frac{\|A\|}{\mu}\|x_1 - x_2\|,$$

con $\|A\|/\mu < 1$. Per il Teorema di Banach-Caccioppoli [2, Theorem 5.7], esiste un unico $x \in X$ t.c. $S(x) = x$. Ovvero, x è l'unica soluzione di (6.2) in X. Pertanto, $\mu \in \rho(A)$. Similmente si tratta il caso $\mu < -\|A\|$.

Proviamo che $\rho(A)$ è un insieme aperto. Sia $\mu_0 \in \rho(A)$, allora $A - \mu_0 I$ è biunivoco, e per il Teorema 4.2 (ved. anche Osservazione 4.3) abbiamo $(A - \mu_0 I)^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$. Per ogni $\mu \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|\mu - \mu_0| < \frac{1}{\|(A - \mu_0 I)^{-1}\|}$$

e ogni $y \in X$ definiamo una mappa $T : X \to X$ ponendo per ogni $x \in X$

$$T(x) = (A - \mu_0 I)^{-1}(y + (\mu - \mu_0)x).$$

Anche T è una contrazione, in quanto per ogni $x_1, x_2 \in X$ si ha

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| \leqslant \|(A - \mu_0 I)^{-1}\||\mu - \mu_0|\|x_1 - x_2\|.$$

Come sopra, esiste un unico $x \in X$ t.c. $T(x) = x$, da cui $\mu \in \rho(A)$. Ne segue che $\sigma(A)$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}$, quindi compatto. □

Dalla Definizione 6.1 si vede che, se $\mu \in \mathbb{R}$ è un autovalore di A, allora $\mu \in \sigma(A)$, mentre l'inverso non è vero in generale ($A - \mu I$ potrebbe essere iniettivo ma non suriettivo).

Supponiamo ora che $A \in \mathcal{K}(X)$. Allora, per ogni $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'equazione (6.1) appartiene alla classe (5.1), in quanto $x \in X$ risolve (6.1) se e solo se

$$x - \frac{A(x)}{\mu} = 0,$$

dove $A/\mu \in \mathcal{K}(X)$ (Lemma 4.8). In questo caso, gli elementi dello spettro sono tutti autovalori, e si hanno informazioni più dettagliate sulla struttura di $\sigma(A)$:

Teorema 6.3. *Siano X uno spazio di Hilbert t.c.* $\dim(X) = \infty$, $A \in \mathcal{K}(X)$. *Allora:*

(*i*) $0 \in \sigma(A)$;
(*ii*) *per ogni* $\mu \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, μ *è un autovalore di* A;
(*iii*) *l'insieme* $\sigma(A) \setminus \{0\}$ *è vuoto, finito, o una successione convergente a* 0.

Dimostrazione. Proviamo (*i*), per assurdo: supponiamo che $0 \notin \sigma(A)$, ovvero che A sia biunivoco. Allora, per il Lemma 4.10 si ha $I = A^{-1} \circ A \in \mathcal{K}(X)$, da cui segue che $\overline{B}_1$ è compatto, contro l'ipotesi che $\dim(X) = \infty$ (Teorema 5.1).

Proviamo (*ii*), ancora per assurdo: supponiamo che $\mu \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ e $A - \mu I$ sia iniettivo. Allora, per la Proposizione 5.2 (*iii*) $A - \mu I$ è anche suriettivo e quindi $\mu \in \rho(A)$, una contraddizione (osserviamo che $A - \mu I$ è iniettivo, o suriettivo, se e solo se lo è $I - \mu^{-1} A$).

Proviamo infine (*iii*). Supponiamo che $\sigma(A)$ sia infinito. Allora esiste una successione (μ_k) in $\sigma(A) \setminus \{0\}$ t.c. $\mu_h \neq \mu_k$ per ogni $h \neq k$. Poiché (μ_k) dimora nell'insieme compatto $\sigma(A)$ (Lemma 6.2), passando se necessario a una sottosuccessione abbiamo

$$\lim_k \mu_k = \mu.$$

Dimostriamo che $\mu = 0$, per assurdo. Supponiamo che $\mu \neq 0$. Per *(ii)*, per ogni $k \in \mathbb{N}$ il numero μ_k è un autovalore di A, ovvero esiste $e_k \in \ker(A-\mu_k I)\setminus\{0\}$. I vettori (e_k) sono linearmente indipendenti, come dimostreremo per induzione su $k \in \mathbb{N}$. Per $k = 1$ basta osservare che $e_1 \neq 0$. Assumiamo ora che $k \geqslant 1$ e che $e_1, \dots e_k$ siano linearmente indipendenti, mentre esistono $\alpha_1, \dots \alpha_k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$e_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}\sum_{i-1}^{k} \alpha_i(\mu_i - \mu_{k+1})e_i &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A(e_i) - \mu_{k+1} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \\ &= A(e_{k+1}) - \mu_{k+1}e_{k+1} = 0,\end{aligned}$$

da cui $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, assurdo. Dunque $e_1, \dots e_{k+1}$ sono linearmente indipendenti, il che conclude l'induzione.

Poniamo per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$E_k = \operatorname{span}(e_1, \dots e_k).$$

Per quanto visto sopra, (E_k) è una successione di sottospazi di X di dimensione finita, t.c. per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $E_k \subset E_{k+1}$ e

$$(A - \mu_{k+1}I)(E_{k+1}) \subseteq E_k. \tag{6.3}$$

Infatti, per ogni $i \in \{1, \dots k\}$ abbiamo

$$A(e_i) - \mu_{k+1}e_i = (\mu_i - \mu_{k+1})e_i \in E_k,$$

mentre $A(e_{k+1}) - \mu_{k-1}e_{k+1} = 0$. Per (5.2), per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $x_{k+1} \in E_{k+1} \cap \partial B_1$ t.c.

$$\operatorname{dist}(x_{k+1}, E_k) = 1.$$

Fissiamo $h < k$, allora per (6.3) si ha

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{A(x_k)}{\mu_k} - \frac{A(x_h)}{\mu_h}\Big\| &= \Big\|\frac{(A-\mu_k I)(x_k)}{\mu_k} - \frac{(A-\mu_h I)(x_h)}{\mu_h} + x_k - x_h\Big\| \\ &\geqslant \operatorname{dist}(x_k, E_{k-1}) = 1.\end{aligned}$$

Dunque la successione $(A(x_k)/\mu_k)$ non ha sottosuccessioni convergenti. D'altra parte, $\mu_k \to \mu \neq 0$, e poiché $A \in \mathcal{K}(X)$ e (x_k) è limitata, passando a una sottosuccessione abbiamo $A(x_k) \to y$. Dunque $A(x_k)/\mu_k \to y/\mu$, assurdo. Dunque $\mu = 0$. Per concludere osserviamo che, poiché 0 è l'unico punto di accumulazione di $\sigma(A) \setminus \{0\}$, quest'ultimo insieme ha cardinalità numerabile e consiste in una successione convergente a 0. □

Se l'operatore è autoaggiunto (Definizione 4.18), sono noti gli estremi dello spettro:

Proposizione 6.4. *Siano X uno spazio di Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X)$ autoaggiunto, e*

$$m = \inf_{x \in \partial B_1} \langle A(x), x\rangle, \ \ M = \sup_{x \in \partial B_1} \langle A(x), x\rangle.$$

Allora:

(i) $\max \sigma(A) = M$;
(ii) $\min \sigma(A) = m$;
(iii) $\|A\| = \max\{|m|, |M|\}$.

Dimostrazione. Proviamo (i). Fissato $\mu > M$, poniamo per ogni $x, y \in X$

$$a(x, y) = \langle \mu x - A(x), y\rangle.$$

Così $a : X \times X \to \mathbb{R}$ è una forma bilineare continua. Inoltre a è coerciva, in quanto per ogni $x \in X$

$$a(x, x) \geqslant (\mu - M)\|x\|^2.$$

Per il Teorema 2.12, per ogni $y \in X$ esiste un unico $x \in X$ t.c. per ogni $z \in X$

$$a(x, z) = -\langle y, z\rangle,$$

ovvero $\mu x - A(x) = y$. Dunque $A - \mu I$ è biunivoco e $\mu \in \rho(A)$, da cui

$$\sup \sigma(A) \leqslant M.$$

D'altra parte si ha $M \in \sigma(A)$, come dimostriamo per assurdo. Supponiamo che $M \in \rho(A)$. Definiamo un'altra forma bilineare $b : X \times X \to \mathbb{R}$ ponendo per ogni $x, y \in X$

$$b(x, y) = \langle Mx - A(x), y\rangle.$$

Così b è continua, simmetrica (perché A è autoaggiunto), e per ogni $x \in X$

$$b(x, x) = M\|x\|^2 - \langle A(x), x\rangle \geqslant 0.$$

Vale la seguente diseguaglianza (simile a (1.1)) per ogni $x, y \in X$

$$|b(x, y)| \leqslant b(x, x)^{\frac{1}{2}} b(y, y)^{\frac{1}{2}},$$

da cui per ogni $x \in X$

$$\|Mx - A(x)\| = \sup_{y \in \partial B_1} |b(x, y)| \leqslant C\langle Mx - A(x), x\rangle^{\frac{1}{2}} \tag{6.4}$$

(per un opportuno $C > 0$ dipendente da A). Per definizione di M, esiste una successione (x_n) in ∂B_1 t.c.

$$\lim_n \langle A(x_n), x_n\rangle = M.$$

Per (6.4), ne segue che $\|Mx_n - A(x_n)\| \to 0$. Poiché $M \in \rho(A)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$1 = \|x_n\| \leqslant \|(MI - A)^{-1}\|\|Mx_n - A(x_n)\|,$$

e l'ultimo membro tende a 0, assurdo. Dunque si ha (i).

Similmente si dimostra (ii).

Proviamo (iii). Assumiamo $M > m \geqslant 0$ e dimostriamo che $\|A\| = M$ (gli altri casi si possono trattare in modo analogo). Poiché A è autoaggiunto, per ogni $x, y \in X$ si ha

$$\langle A(x + y), x + y\rangle = \langle A(x), x\rangle + 2\langle A(x), y\rangle + \langle A(y), y\rangle,$$

$$\langle A(x - y), x - y\rangle = \langle A(x), x\rangle - 2\langle A(x), y\rangle + \langle A(y), y\rangle,$$

da cui, sottraendo membro a membro e applicando (1.2), si ottiene

$$\begin{aligned}
|4\langle A(x), y\rangle| &= \big|\langle A(x + y), x + y\rangle - \langle A(x - y), x - y\rangle\big| \\
&\leqslant M\big(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\big) \\
&= 2M\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).
\end{aligned}$$

Più generalmente, per ogni $t > 0$, ragionando come sopra con i vettori $t^{-\frac{1}{2}}x$, $t^{\frac{1}{2}}y$ si ottiene

$$|\langle A(x), y\rangle| \leqslant \frac{M}{2}\Big(\frac{\|x\|^2}{t} + t\|y\|^2\Big) = g(t).$$

La funzione $g \in C^1(0, +\infty)$ ammette minimo globale per $t = \|x\|/\|y\|$ (se $\|y\| \neq 0$, altrimenti la conclusione è immediata), dunque abbiamo per ogni $x, y \in X$

$$|\langle A(x), y\rangle| \leqslant M\|x\|\|y\|.$$

Questo implica $\|A\| \leqslant M$. D'altra parte, per ogni $x \in \partial B_1$ si ha

$$|\langle A(x), x\rangle| \leqslant \|A\|,$$

da cui $M \leqslant \|A\|$. Concludendo, $\|A\| = M$. □

Una conseguenza della Proposizione 6.4 è che ogni operatore autoaggiunto non nullo ha almeno un autovalore non nullo (ved. Esercizio 6.8). Infine, se l'operatore è sia compatto che autoaggiunto, l'intero spazio può essere descritto usando il suo spettro:

Teorema 6.5. *Siano X uno spazio di Hilbert separabile t.c.* $\dim(X) = \infty$, $A \in \mathcal{K}(X)$ *autoaggiunto. Allora esiste una base ortonormale di X composta da autovettori di A.*

Dimostrazione. Per il Teorema 6.3 esiste una successione (μ_k) t.c. $\sigma(A) = (\mu_k)$. Senza perdita di generalità possiamo supporre $\mu_h \neq \mu_k$ per ogni $h \neq k$. Poniamo (per esigenze di notazione) $\mu_0 = 0$, e per ogni $k \geqslant 0$

$$E_k = \ker(A - \mu_k I).$$

Osserviamo che $E_0 = \ker(A)$ è un sottospazio chiuso, quindi a sua volta uno spazio di Hilbert separabile. Per il Teorema 3.2, E_0 ha una base ortonormale (possibilmente infinita), che denotiamo $\mathcal{B}_0$. Inoltre, per ogni $k \geqslant 1$ si ha $0 < \dim(E_k) < \infty$ (Proposizione 5.2 *(i)*), così che E_k ha una base ortonormale (finita), denotata $\mathcal{B}_k$. Poniamo

$$\mathcal{B} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k.$$

Proviamo che $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di X. Per prima cosa, proviamo che E_h, E_k sono ortogonali per ogni $h \neq k$. Infatti, per ogni $x \in E_h$, $y \in E_k$ si ha

$$\mu_h\langle x, y\rangle = \langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle = \mu_k\langle x, y\rangle,$$

e da $\mu_h \neq \mu_k$ segue $x \perp y$. Ne segue che $\mathcal{B}$ è una successione ortogonale di vettori di norma unitaria. Sia inoltre

$$E = \operatorname{span}(\mathcal{B}).$$

Proviamo che $E \subseteq X$ è denso. Per ogni $k \geqslant 0$, $x_i \in E_i$ $(i = 0, \dots k)$ si ha

$$A\Big(\sum_{i=0}^{k} x_i\Big) = \sum_{i=0}^{k} \mu_i x_i \in E,$$

da cui $A(E) \subseteq E$. Pertanto, per ogni $x \in E^\perp$, $y \in E$ si ha $A(y) \in E$, da cui

$$\langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle = 0,$$

ovvero $A(E^\perp) \subseteq E^\perp$. Poniamo $\widetilde{A} = A|_{E^\perp}$, così che $\widetilde{A} \in \mathcal{K}(E^\perp)$ ed è autoaggiunto. Proviamo che

$$\sigma(\widetilde{A}) = \{0\}, \tag{6.5}$$

per assurdo. Sia $\mu \in \sigma(\widetilde{A}) \setminus \{0\}$. Per il Teorema 6.3 *(ii)*, μ è un autovalore di $\widetilde{A}$, quindi esiste $x \in E^\perp \setminus \{0\}$ t.c. $A(x) = \mu x$. Allora possiamo trovare $k \in \mathbb{N}$ t.c. $\mu = \mu_k$, da cui $x \in E \cap E^\perp$, assurdo. Per la Proposizione 6.4 (ved. Esercizio 6.8), da (6.5) segue $\widetilde{A} = 0$. Pertanto, $E^\perp \subseteq \ker(A) \subseteq E$, ovvero $E^\perp = \{0\}$. Da questo segue che E è un sottospazio denso di X, e quindi $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di X. □

Dalla dimostrazione del Teorema 6.5, vediamo in particolare che ad ogni autovalore di un operatore A compatto autoaggiunto, a parte 0, corrisponde un autospazio di dimensione finita. Inoltre, detta (e_k) una base ortonormale di X formata da autovettori di A, con e_k associato all'autovalore μ_k (non è escluso che si abbia $\mu_h = \mu_k$ per qualche $h \neq k$), per ogni $x \in X$ la Proposizione 3.3 determina una successione $(\lambda_k) \in \ell^2$ t.c.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k,$$

da cui la seguente formula di *decomposizione spettrale* per A:

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mu_k e_k.$$

Applicheremo queste proprietà (insieme ad altre più specifiche) agli operatori differenziali del secondo ordine in [7].

Esercizio 6.6. Dimostrare che, per ogni operatore lineare $A \in L(\mathbb{R}^N)$, lo spettro coincide con l'insieme degli autovalori (più 0).

Esercizio 6.7. Dimostrare la Proposizione 6.4 *(iii)* nei casi non considerati.

Esercizio 6.8. Siano X uno spazio di Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X)$ autoaggiunto t.c. $\sigma(A) = \{0\}$. Dimostrare che $A = 0$ (e se A non è autoaggiunto?).

Riferimenti bibliografici

[1] A. Ambrosetti, G. Prodi, A primer of nonlinear analysis, Cambridge (1993)
[2] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer (2011)
[3] J. Diestel, Geometry of Banach spaces, Springer (1975)
[4] N.J. Dunford, J.T. Schwartz, Linear operators I – General theory, Wiley (1988)
[5] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, M. Montesinos, V. Zizler, Banach space theory, Springer (2011)
[6] A. Iannizzotto, Spazi di Sobolev (2021)
[7] A. Iannizzotto, Equazioni alle derivate parziali lineari/1: Problemi stazionari (2021)
[8] R.T. Rockafellar, Convex analysis, Princeton (1970)
[9] W. Rudin, Real and complex analysis, McGraw Hill (1987)

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Cagliari
Via Ospedale 72, 09124 Cagliari, Italy
Email address: antonio.iannizzotto@unica.it