Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

7 settembre 2021

Esercizio 1

Si consideri l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(1,1,0) = (1,1)$, $f(1,0,0) = (0,0)$, $f(0,2,1) = (2,0)$, e l'applicazione lineare $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ la cui matrice associata rispetto alle basi {(-1,0), (1,1)} di $\mathbb{R}^2$ e $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ di $M_2(\mathbb{R})$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Trovare $(g \circ f)(1,2,0)$
b) Determinare una base del nucleo di $g \circ f$
c) Determinare una base dell'immagine di $g \circ f$

Esercizio 2

Dato il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 6x_1 + (k+2)x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + (k+1)x_3 + 6x_4 = 3 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + kx_4 = 1 \end{cases}$$

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema è compatibile ed in tali casi trovarne esplicitamente le soluzioni

Esercizio 3

Sia

$$V = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A = -A^t\}$$

lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche di ordine 3 ad entrate reali ed f l'endomorfismo di V definito da

$$f\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x+z & -2x-y-z \\ -x-z & 0 & -z \\ 2x+y+z & z & 0 \end{pmatrix}$$

Stabilire se f è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base di V formata da autovettori di f.