SOLUZIONI TRACCIA 8 LUGLIO 2021

ESERCIZIO 1

· Trovo una base di V.

· La matrice associata al sistema è $A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$

$\rho(A)=2 \Rightarrow$ il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3s+4t \\ x_2 = -2t \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_3=s \\ x_4=t \end{matrix}$$

da cui
$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 - 3s + 4t \\ &= -4t - 3s + 4t \\ &= -3s \end{aligned}$$

Conclusione:
$$\begin{aligned} V &= \{(-3s, -2t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= L(\underbrace{(-3,0,1,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,-2,0,1)}_{v_2}) \end{aligned}$$

Dalla teoria sappiamo che
$$\begin{aligned} \dim L(V,W) &= \dim V \cdot \dim W \\ &= 2 \cdot 2 = 4. \end{aligned}$$

· Dato che vi è un isomorfismo

$$\begin{aligned} F : L(V,W) &\longrightarrow M_{2,2}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto M_{BB'}(f) \end{aligned}$$

una base di $L(V,W)$ è data da

$$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

dove $f_1, f_2, f_3, f_4 : V \longrightarrow W$ sono le uniche applicazioni lineari tali che

$$M_{B,B'}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B,B'}(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B,B'}(f_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B,B'}(f_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $B = \{\underbrace{(-1, 0, 1, 0)}_{v_1}, \underbrace{(0, -2, 0, 1)}_{v_2}\}$ è base di V

$B' = \{\underbrace{(0, 1, 1)}_{w_1}, \underbrace{(2, 0, 0)}_{w_2}\}$ è base di W

ESERCIZIO 2

a)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & k & 1 & k & 2 \\ -k & 2 & -1 & 2 & k \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & k & 1 & k & 2 & k \\ -k & 2 & -1 & 2 & k & k \end{pmatrix}$$

$\rho(A) \geq 2$ perchè $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$.

Dato che $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 2 \\ -1 & 2 & k \end{pmatrix} = k^2 - 4 = (k+2)(k-2)$

abbiamo che per $k \neq 2$ e $k \neq -2$ $\rho(A) = 3 = \rho(A|B)$

e il sistema è compatibile con ∞^2 soluzioni.

Controlliamo i casi $k=2$ e $k=-2$.

<u>$k=2$</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi sono solo 2 colonne lin. indipendenti, sia in A che A|B: la 3ª e la 4ª, le rimanenti essendo loro combinazione lineare.

$\Rightarrow \rho(A) = 2 = \rho(A|B) \Rightarrow$ sistema compatibile con $\infty 3$ soluzioni.

$\underline{k=-2}$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A|B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Poiché la 1ª e 5ª colonna sono proporzionali alla 4ª e la 2ª colonna è proporzionale alla 3ª, concludiamo che il massimo numero di colonne lin. indipendenti di A è 2, e quindi $\rho(A)=2$.

Invece $\rho(A|B)=3$ perché

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Quindi per $k=-2$ il sistema è incompatibile.

$\underline{\text{SOLUZIONI}}$

- $k \neq 2, -2$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_3 = 2t \\ x_3 + kx_4 + 2x_5 = 2s - kt + k \\ -x_3 + 2x_4 + kx_5 = ks - 2t + k \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1 &= s \\ x_2 &= t \end{aligned}$$

da cui $x_3 = 2t$ e quindi

$$\begin{cases} kx_4 + 2x_5 = 2s - (k+2)t + k \\ 2x_4 + kx_5 = ks + k \end{cases}$$

che è un sistema di Cramer. (per costruzione)

Allora

$$x_4 = \frac{\det\begin{pmatrix} 2s-(k+2)t+k & 2 \\ ks+k & k \end{pmatrix}}{k^2-4} = \frac{2\cancel{ks} - k(k+2)t - 2\cancel{ks} - 2k + k^2}{k^2-4}$$

$$= -\frac{k}{k-2}t + \frac{k}{k+2}$$

$$x_5 = \frac{\det\begin{pmatrix} k & 2s-(k+2)t+k \\ 2 & ks+k \end{pmatrix}}{k^2-4} = \frac{k^2s - 4s + 2(k+2)t - 2k + k^2}{k^2-4}$$

$$= \frac{(k^2-4)s + 2(k+2)t + k(k-2)}{k^2-4}$$

L'insieme delle soluzioni è

$$S = \left\{\left(s,\ t,\ 2t,\ -\frac{k}{k-2}t + \frac{k}{k+2},\ s + \frac{2}{k-2}t + \frac{k}{k+2}\right) : s,t \in \mathbb{R}\right\}$$

• $\underline{k=2}$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_3 = 2t \\ -x_3 + 2x_4 = 2+2s-2t-2w \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1 = s \\ x_2 = t \\ x_5 = w \end{array}$$

da cui $x_3 = 2t$ e $x_4 = 2+2s-\cancel{2t}-2w+\cancel{2t}$

$$= 2+2s-2w$$

L'insieme delle soluzioni è

$$S = \{(s, t, 2t, 2+2s-2w, w) : s, t, w \in \mathbb{R}\}$$

b) Dalla teoria sappiamo che ciò accade quando il sistema è omogeneo. Nel nostro caso ciò è equivalente a $k=0$.

In tal caso, sfruttando i risultati del caso $k \neq 2, -2$ si ha che

$$W = \{(s, t, 2t, 0, s-t) : s, t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{s(1,0,0,0,1) + t(0,1,2,0,-1) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Una base di W è $B = \{(1,0,0,0,1), (0,1,2,0,-1)\}$.

ESERCIZIO 3

Dalla teoria $A = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}$ è simile a una matrice diagonale $\Leftrightarrow$ A è diagonalizzabile.

Trovo gli autovalori.

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} h-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & h-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\left((h-\lambda)^2 - 1\right)$$

$$= (2-\lambda)(h-\lambda-1)(h-\lambda+1).$$

Gli autovalori sono quindi $\lambda = 2$, $\lambda = h-1$, $\lambda = h+1$.

Vi sono dunque i seguenti casi:

h	AUTOVALORI	m_a	m_g	DIAGONALIZZABILE ?
3	2 4	2 1	? 1	
1	2 0	2 1	? 1	
$\neq 1,3$	2 $h-1$ $h+1$	1 1 1	1 1 1	SÌ

Se $h \neq 1 \wedge h \neq 3$ vi sono 3 autovalori reali e distinti e quindi A è diagonalizzabile (per la Teoria).

Restano i casi $h=1$, $h=3$, dove bisogna controllare esclusivamente la molteplicità geometrica dell'autovalore 2, dato che per la Teoria l'autovalore 1 non può che avere $m_g = 1$ (dato che $m_a = 1$).

CASO $h=3$

$$m_g(2) = \dim V(2) = 3 - \rho \begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix}$$

$$= 3 - \rho \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 = m_a(2) \Longrightarrow$$

A è diagonalizzabile

CASO $h=1$

$$m_g(2) = \dim V(2) = 3 - \rho \begin{pmatrix} 1-2 & 1 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 1 & 1-2 \end{pmatrix}$$

$$= 3 - \rho \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3-2 = 1 \neq m_a(2) \Longrightarrow$$

A non è diagonalizzabile.