Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

10 giugno 2021

Esercizio 1

a) Verificare che esiste una applicazione lineare $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,1), \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0), \qquad f\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (2,0), \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (0,1)$$

b) f è unica?

c) Trovare $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) Sia $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi $B = \{(1,1),(1,0)\}$ di $\mathbb{R}^2$ e $B' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ è

$$M_{BB'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare una base di $\ker(g \circ f)$

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile ed in tali casi trovarne esplicitamente le soluzioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = k \\ x_1 + (k-1)x_2 = 0 \\ x_1 + (k-1)x_2 + kx_3 = k \end{cases}$$

Esercizio 3

Si consideri l'endomorfismo f dello spazio vettoriale

$$V = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \ a + b = 0\right\}$$

tale che, per ogni $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ -4a - c + 8d & 3d \end{pmatrix}$$

Stabilire se f è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una base di V formata da autovettori di f.