ANALISI SUPERIORE 2 – A.A. 2020/2021

ANTONIO IANNIZZOTTO

Versione del 9 febbraio 2021

1. Obiettivi

Gli obiettivi formativi del corso sono i seguenti:

1. **Conoscenza e capacità di comprensione.** Lo studente perfezionerà la sua conoscenza dell'analisi funzionale classica e delle sue applicazioni alle equazioni alle derivate parziali lineari. Apprenderà le proprietà fondamentali degli spazi di Hilbert astratti, degli spazi funzionali più importanti, e degli operatori fra tali spazi.
2. **Capacità applicative.** Lo studente apprenderà i metodi risolutivi basati sull'analisi funzionale per diverse classi di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine lineari: equazioni di Laplace-Poisson, equazioni ellittiche generali con diverse condizioni al contorno, del calore, delle onde.
3. **Autonomia di giudizio.** Lo studente imparerà a distinguere le classi principali di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine (ellittiche, paraboliche, iperboliche) e ad applicare a ciascuna classe il metodo risolutivo più opportuno, inquadrando ogni problema nella corretta formulazione funzionale.
4. **Abilità nella comunicazione.** Frequentando il corso, confrontandosi con i testi consigliati (in inglese), e preparando la prova di verifica, lo studente acquisterà familiarità con il linguaggio formale della ricerca matematica attuale e imparerà ad esporre i risultati in modo rigoroso e sintetico.
5. **Capacità di apprendere.** Lo studente sarà avviato, soprattutto nella parte finale del corso, verso uno studio autonomo e creativo: sulla base di alcuni esempi significativi e con opportune indicazioni bibliografiche, potrà estendere in modo indipendente la propria conoscenza delle equazioni alle derivate parziali a casi più generali o complessi.

2. Prerequisiti

Elementi di analisi funzionale (spazi di Banach, dualità, topologia debole, riflessività). Misura e integrazione di Lebesgue, spazi di Lebesgue. Teorema delle contrazioni di Banach-Caccioppoli. Operatori lineari su spazi di dimensione finita. Elementi di topologia generale (compattezza, connessione, spazi metrici). Equazioni differenziali ordinarie.

3. Contenuti

Il programma del corso si articola nelle seguenti unità:

1. **Spazi di Hilbert e operatori lineari.** Richiami sugli spazi di Banach: duale*, topologia debole*, riflessività*, compattezza forte e debole*, teorema di Hahn-Banach*. Definizioni di prodotto scalare, spazio di Hilbert; indentità del parallelogramma; uniforme convessità; riflessività. Proprietà di approssimazione, proiezione metrica, proiezione ortogonale. Duale di uno spazio di Hilbert: teorema di rappresentazione di Riesz, complemento ortogonale. Forme bilineari: Teoremi di Stampacchia, Lax-Milgram. Basi ortonormali: teorema di decomposizione, identità di Parseval. Aggiunto di un operatore: relazioni di ortogonalità, operatori autoaggiunti su spazi

di Hilbert. Operatori compatti, di rango finito. Teorema di Schauder. Richiami sugli operatori lineari continui: teoremi della mappa aperta*, del grafico chiuso*. Operatori discontinui: dominio, densità. Teoria di Riesz-Fredholm: lemma di Riesz, teorema di Riesz (caratterizzazione degli spazi di dimensione finita), teorema di alternativa di Fredholm. Insieme risolvente e spettro di un operatore: autovalori e autovettori, spettro di un operatore compatto, di un operatore autoaggiunto, teorema di decomposizione spettrale. *Esempi e applicazioni:* spazi euclidei, lo spazio L^2, disequazioni variazionali, serie di Fourier, funzionali debolmente semicontinui, esistenza del minimo, la derivata come operatore funzionale, richiami sulle equazioni differenziali ordinarie lineari.

2. **Spazi di Sobolev.** Richiami sugli spazi L^p: riflessività*, separabilità*, uniforme convessità*, convergenza in L^p*, prodotto di convoluzione, teorema di Young, mollificatori, operatore di traslazione. Teoremi di Ascoli-Arzelà*, di Kolmogorov-Riesz-Frchet*. Definizioni di derivata debole, spazio $W^{1,p}$. Proprietà di $W^{1,p}$: separabilità, uniforme convessità, riflessività, caratterizzazione. Lo spazio $H^1 = W^{1,2}$. Definizione e proprietà di $W^{k,p}$ $(k > 1)$. Operazioni sulle derivate deboli. Teoremi di estensione: estensione per riflessione, teorema di estensione per domini regolari*. Densità: teorema di Friedrichs, teorema di densità per domini regolari. Teoremi di immersione: diseguaglianza di Sobolev (Gagliardo-Nirenberg), immersione continua di $W^{1,p}$ in spazi L^q, teorema di Morrey*. Immersioni compatte: teorema di Rellich-Kondrachov. Immersioni di $W^{k,p}$*. Lo spazio $W_0^{1,p}$ (H_0^1): definizione e caratterizzazione, diseguaglianza di Poincaré, norma equivalente, duale*. *Esempi e applicazioni:* derivate deboli e classiche, ottimalità dell'esponente di Sobolev, approssimazione mediante funzioni regolari.
3. **Equazioni alle derivate parziali lineari/1: Problemi stazionari.** Introduzione alle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine lineari: definizione di soluzione classica, classificazione, condizioni al bordo (Dirichlet e Neumann). Equazioni ellittiche: definizione di soluzione debole per il problema di Dirichlet omogeneo con operatore laplaciano, esistenza e unicità (mediante il teorema di Lax-Milgram), regolarità (metodo delle traslazioni di Nirenberg, casi dei domini $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^N_+$, e del dominio regolare con frontiera limitata*), ritorno alla soluzione classica, principio del massimo. Esistenza di soluzioni per equazioni ellittiche mediante l'alternativa di Fredholm. Spettro del laplaciano: caratterizzazione degli autovalori, decomposizione spettrale. Cenni sugli operatori lineari generali*, sul problema di Dirichlet non omogeneo*, sul problema di Neumann*, sulle equazioni ellittiche non lineari*, sul p-Laplaciano*. *Esempi e applicazioni:* equazioni di Laplace, di Poisson, funzioni armoniche, casi di inesistenza della soluzione classica, il caso monodimensionale, problema di Robin.
4. **Equazioni alle derivate parziali lineari/2: Problemi evolutivi.** Operatori monotoni su spazi di Hilbert: definizioni di operatore monotono, massimale monotono, proprietà, operatore risolvente, approssimante di Yosida. Problemi evolutivi in spazi di Hilbert, imperniati su operatori massimali monotoni: definizione di soluzione, esistenza e unicità nel caso continuo. Teorema di Hille-Yosida*: dal problema regolarizzato a quello discontinuo, proprietà di conservazione. Il caso autoaggiunto. Regolarità della soluzione. Equazioni paraboliche: esistenza e unicità della soluzione dell'equazione del calore con condizioni di Cauchy-Dirichlet, regolarità, risoluzione per decomposizione spettrale, principio del massimo. Equazioni iperboliche: esistenza e unicità per l'equazione delle onde con condizioni di Cauchy-Dirichlet, regolarità*, risoluzione per decomposizione spettrale. *Esempi e applicazioni:* sistemi di equazioni differenziali ordinarie, significato fisico delle proprietà delle soluzioni di equazioni evolutive, condizioni di Cauchy-Neumann, equazioni paraboliche con sorgente.

Per gli argomenti contrassegnati da * non è richiesta la dimostrazione durante il colloquio (sarà invece richiesta nelle tesine e nei seminari).

4. Metodi didattici

Il corso (9 CFU/72 ore) sarà composto da lezioni frontali, possibilmente accompagnate da seminari tenuti da altri docenti o da professori visitatori. Alcune dimostrazioni e applicazioni saranno lasciate agli studenti come esercizio e poi verificate dal docente: in tal senso, gli incontri col docente per chiarimenti e approfondimenti sono considerati parte integrante dell'attività formativa. Una partecipazione attiva sarà fortemente incoraggiata. Sarà fatto uso della lavagna, di slide, e occasionalmente di programmi di calcolo. Le note del corso, integrative dei testi consigliati, saranno fornite agli studenti e aggiornate.

5. Verifica dell'apprendimento

La verifica sarà volta a valutare principalmente i seguenti elementi: conoscenza dei contenuti, capacità di elaborazione autonoma, capacità di esposizione. Data la natura eminentemente astratta della disciplina, non è prevista una prova scritta consistente in esercizi. La verifica sarà dunque articolata in due parti:

1. **Prova facoltativa.** Esposizione orale (seminario) o scritta (tesina) di un argomento del corso o collegato ad esso. Per questa prova lo studente avrà a disposizione un elenco di argomenti (ved. sotto) e i suggerimenti concettuali e bibliografici del docente. La prova sarà valutata con un voto da 1 a 30.
2. **Prova obbligatoria.** Colloquio orale di circa 45 minuti, articolato in 3 domande relative a tutto il programma tranne (eventualmente) la parte interessata dalla prova precedente. Su richiesta dello studente, questa prova può essere divisa in due colloqui, relativi rispettivamente alle unità **1–2** e **3–4** del programma. Anche questa prova sarà valutata con un voto da 1 a 30.

Il voto finale sarà dato dalla media aritmetica fra i voti delle prove sostenute, e l'esame si riterrà superato se tale media sarà compresa fra 18 (preparazione sufficiente) e 30 (preparazione ottima). La lode sarà attribuita in caso di prove particolarmente brillanti.

Di séguito sono indicati alcuni argomenti adatti per una tesina o un seminario integrativi dell'esame (dettagli da stabilire con il docente):

a. Esistenza di soluzioni per disequazioni variazionali
b. Serie di Fourier astratte e in L^2
c. Operatori lineari in spazi di Banach
d. Alternativa di Fredholm in spazi di Banach
e. Diseguaglianze e immersioni di Sobolev
f. Teorema di Lax-Milgram e applicazione alle equazioni ellittiche
g. Teorema di alternativa di Fredholm e applicazione alle equazioni ellittiche
h. Teorema di Hille-Yosida e applicazione all'equazione del calore
i. Teorema di Hille-Yosida e applicazione all'equazione delle onde
j. Spettro di un operatore lineare, con applicazione al laplaciano
k. Regolarità per le soluzioni di equazioni ellittiche lineari
l. Il problema di Neumann per un'equazione ellittica lineare
m. Principi del massimo per equazioni ellittiche e paraboliche

6. Testi

1. H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer, New York (2011)
2. L.C. Evans, Partial differential equations, American Mathematical Society, Providence (1998)
3. D. Motreanu, V.V. Motreanu, N.S. Papageorgiou, Topological and variational methods with applications to nonlinear boundary value problems, Springer, New York (2014)

4. Dispense del docente

7. Altre informazioni

Sul sito del docente verranno gradualmente rese disponibili le note del corso e altro materiale didattico. Il nostro Ateneo fornisce supporto agli studenti affetti da disturbi specifici dell'apprendimento (DSA). *Tutta l'attività didattica e di verifica si svolgerà in presenza o a distanza, secondo le disposizioni di legge e i regolamenti dell'Ateneo.*