UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

S_c

Forza dell’interesse 6

Tasso annuo nominale

- Sostituendo a il suo valore, cioè il **fattore unitario di capitalizzazione composta**, si ha infine:

$$j_k = ki_k$$

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$j = ki_k = k[(1+i)^{1/k} - 1]$$

Tasso annuo nominale

- da cui si possono ricavare le formule inverse
- \- il tasso frazionato

$$i_k = \frac{j_k}{k}$$

- \- il tasso annuo corrispondente

$$i = \left(1 + \frac{j_k}{k}\right)^k - 1$$

Tasso continuo

$$i = \left(1 + \frac{j_k}{k}\right)^k - 1$$

$$i + 1 = \left(1 + \frac{j_k}{k}\right)^k$$

$$(i+1)^{1/k} = \left(1 + \frac{j_k}{k}\right)$$

$$(i+1)^{1/k} - 1 = \frac{j_k}{k} \qquad k\left[(i+1)^{1/k} - 1\right] = j_k$$

Tasso continuo

- Un altro importante aspetto riguardante i **tassi nominali convertibili** si ha considerando l’ipotesi di **convertire** il tasso **infinite volte**, cioè istante per istante invece che un numero ***k*** **finito di volte**

Tasso continuo

$$\lim_{k \to \infty} \cdot j_k =$$

$$\lim_{k \to \infty} k \cdot \left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1 \right]$$

Tasso continuo

$$j_k = k\left[(i+1)^{1/k} - 1\right] =$$

$$j_\infty = k\left[(i+1)^{1/k} - 1\right] =$$

Tasso continuo

$$\lim_{k \to \infty} \cdot j_k =$$

$$\lim_{k \to \infty} k \cdot \left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1 \right] =$$

$$= \lim_{1/k \to 0^+} \left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1 \right] / (1/k)$$

Tasso continuo

$$= \lim_{1/k \to 0^+} \left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1 \right] / (1/k) =$$

$$= \log(1+i) = \delta$$

il tasso continuo si indica con il simbolo δ

Tasso continuo

$$\delta = \log(1+i)$$

δ

$$e^{\delta} = 1+i$$

Capitalizzazione Continua

$$i = e^{\delta} - 1$$

$$M = C\, e^{\delta t}$$

Capitalizzazione Continua

$$M = Ce^{\delta t}$$

$$C = Me^{-\delta t}$$

Capitalizzazione Continua

- Un modo alternativo di arrivare al **tasso continuo di interesse** è quello di definire la **forza di interesse**.
- Data una **legge di capitalizzazione**, si definisce l'interesse nell'intervallo di tempo $(t, t+h)$

$$I(t, t+h) = M(t, t+h) - M(t)$$

Capitalizzazione Continua

Il tasso effettivo d'interesse è:

$$i(t,t+h)=\frac{M(t,t+h)-M(t)}{M(t)}$$

Capitalizzazione Continua

- Adesso si può definire **intensità d'interesse** come l'interesse maturato nell'unità di tempo elementare:

$$\frac{i(t,\ t+h)}{h} = \frac{r(t,\ t+h) - r(t)}{h} \cdot \frac{1}{r(t)}$$

Tasso istantaneo d'interesse
Forza d'interesse,

- Se si fa tendere ***h*** a zero, si ha il **tasso istantaneo d'interesse**, o **forza d'interesse**,

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \frac{i(t,\ t+h)}{h} = \left[\lim_{h \to 0} \frac{r(t,\ t+h) - r(t)}{h} \right] \cdot \frac{1}{r(t)} =$$

$$= r'(t) \cdot \frac{1}{r(t)} = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{d}{dt} \log r(t)$$

Tasso istantaneo d'interesse Forza d'interesse

- Siccome nel **regime composto** si ha;

$$r(t) = (1+i)^t$$

$$\log r(t) = \log(1+i)^t = t \cdot \log(1+i)$$

Tasso istantaneo d'interesse
Forza d'interesse

- Da cui la **forza dell' interesse** nel regime di **capitalizzazione composta** ha la forma

$$\frac{d}{dt}r(t)=\frac{d}{dt}\left[t\cdot\log(1+i)\right]=$$

$$=\log(1+i)=\delta$$

Forza d'interesse

- Si può notare che, nel regime composto, l**a forza d'interesse** non dipende da ***t*** e che essa individua completamente il regime finanziario.

- Infatti, data **r(t)** è ovvio che si può ricavare la funzione δ **(t)**

- Ma si può anche verificare il contrario, cioè data la **forza d'interesse** δ **(t)** si ricava il **regime finanziario** che essa definisce **r(t)**.

Forza d'interesse

- Dato δ **(t)** **si** ricava il **regime finanziario** che essa definisce:

$$\int_0^t \delta(s)ds) =$$

$$= \int_0^t \frac{d}{ds} \log r(s) =$$

Forza d'interesse

$$\left[\log r(s)\right]_0^t = \log r(t) - \log r(0) =$$

$$= \log(1+i)^t - \log(1+i)^0 =$$

$$= \log(1+i)^t$$

Forza d'interesse

- Da cui;

$$\int_0^t \delta(s)ds = \log(1+i)^t$$

$$M = (1+i)^t = e^{\int_0^t \delta(s)ds}$$

Forza d'interesse

- Da quanto visto segue:
- la **forza d'interesse** è una **costante**, **indipendente dal tempo *t***.

$$r(t) = e^{\delta t} = (1+i)^t$$