UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

S_c

I TASSI EQUIVALENTI E I TASSI NOMINALI CONVERTIBILI 4

I TASSI EQUIVALENTI E I TASSI NOMINALI CONVERTIBILI

- Finora, le **formule dei diversi regimi** sono state indicate con il **tasso riferito al periodo unitario** (che è l'**anno**, se non altrimenti specificato).

- Ma nasce il problema di indicare il **tasso d'interesse** per periodi inferiori, frazioni d'anno.

i_2

I TASSI EQUIVALENTI E I TASSI NOMINALI CONVERTIBILI

- Un tale **tasso frazionato** viene indicato con :

i_k = numero di volte che gli **interessi vengono calcolati in un anno;**

I TASSI EQUIVALENTI E I TASSI NOMINALI CONVERTIBILI

i **tassi frazionati**:

$\mathbf{i}_{2}$; $\mathbf{i}_{4}$ $\mathbf{i}_{12}$ $\mathbf{i}_{360}$

rispettivamente **tasso semestrale**, **trimestrale, mensile, giornaliero** (ovviamente con la convenzione dell'anno commerciale).

I TASSI EQUIVALENTI E I TASSI NOMINALI CONVERTIBILI

- Problema: quale **tasso riferito a una frazione d'anno** dà lo **stesso montante** del **tasso annuo**?

- Questo è proprio il **tasso equivalente** al t**asso annuo**: si tratta di quel **tasso** che applicato sullo **stesso capitale,** per la stessa durata di tempo (anche se con **periodi di capitalizzazione diversi)** produce lo **stesso montante**.

I TASSI EQUIVALENTI E I TASSI NOMINALI CONVERTIBILI

- La ricerca di questi tassi equivalenti va distinta tra regime **semplice** e **composto**:

- a) regime semplice regime semplice
- b) regime composto

$i_k \cdot$

I TASSI EQUIVALENTI E I TASSI NOMINALI CONVERTIBILI

- **Regime semplice**
- Intuitivamente, si può calcolare il tasso equivalente sapendo che gli interessi vengono sempre calcolati sul capitale iniziale: dovendo essere uguali i montanti calcolati una volta con il tasso annuo e *k* volte con il tasso frazionato si ha:

$$C(1 + i) = C[1 + i_K(k)\, t]$$

I TASSI EQUIVALENTI E I TASSI NOMINALI CONVERTIBILI

- quindi: $1 + it = 1 + i_K\, k\, t$; da cui: $it = i_K\, kt$;

$$i_k = \frac{i}{k}$$

- Ad esempio, a un tasso annuo $i = 0{,}10$ corrisponde un tasso trimestrale ;

$$i_4 = \frac{0{,}10}{4} = 0{,}025$$

- viceversa a un tasso mensile del 2% corrisponde un tasso annuo $i = 0{,}02\ 12 = 0{,}24$.

I TASSI EQUIVALENTI E I TASSI NOMINALI CONVERTIBILI

- b) **regime composto**
- Stavolta bisogna tenere conto che la relazione non è lineare e, se la capitalizzazione avviene *k* volte all'anno, ogni volta gli interessi verranno capitalizzati.
-

$$C(1+i)^{t} = C(1+i_{k})^{kt}$$

I TASSI EQUIVALENTI E I TASSI NOMINALI CONVERTIBILI

semplificando *C* e *t*, si ottiene:

$$(1+i) = (1+i_k)^k$$

$$i = (1+i_k)^k - 1$$

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

I TASSI EQUIVALENTI E I TASSI NOMINALI CONVERTIBILI

- esempio, al tasso annuo *i* = 0,21 corrisponde un tasso semestrale :

$$i_2 = \sqrt{1{,}21} - 1 = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$$

- viceversa, a un tasso semestrale del 5% corrisponde un tasso annuo :

$$i = (1 + i_k)^k - 1 =$$

$$= (1 + 5/100)^k - 1 =$$

$$= (1 + 0{,}05)^2 - 1 = 1{,}1025 - 1 = 0{,}1025$$

I TASSI EQUIVALENTI E I TASSI NOMINALI CONVERTIBILI

- Il **tasso annuo**

  i

  equivalente a

  un tasso frazionato $\boldsymbol{i_k}$

  prende il nome di

  tasso annuo effettivo;

I TASSI EQUIVALENTI E I TASSI NOMINALI CONVERTIBILI

a) Nel **regime semplice**, è valida la relazione *:*

$$i = k\, i_k$$

a) Nel regime composto è valida la relazione è **.**

$$i = (1 + i_k)^k - 1$$

Tasso annuo nominale

$$i = (1 + i_k)^k - 1$$

$$\text{che implica}$$

$$i > i_k$$

otteniamo una legge di capitalizzazione frazionata di periodo 1/k di un anno al tasso di interesse i_K

Tasso annuo nominale

Il prodotto

$$ki_k$$

viene chiamato **tasso annuo nominale** convertibile *k* volte all'anno e si indica con il simbolo

$$j_k = ki_k$$

questa può essere considerata come la **somma delle rate di interesse** corrisposte ad ogni ***k*-esimo di anno**.

Tasso annuo nominale

- Sostituendo a il suo valore, cioè il **fattore unitario di capitalizzazione composta**, si ha infine:

$$j_k = k i_k$$

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1$$

$$j = k i_k = k\left[(1+i)^{1/k} - 1\right]$$

Tasso annuo nominale

- da cui si possono ricavare le formule inverse
- - il **tasso frazionato**

$$i_k = \frac{j_k}{k}$$

- - il **tasso annuo corrispondente**

$$i = \left(1 + \frac{j_k}{k}\right)^k - 1$$

Tasso annuo nominale

- Quindi, avendo a disposizione il **tasso nominale,** per trovare il **tasso frazionato** bisogna prima **trovare la frazione** e poi **convertire nel tasso effettivo;**
- ad esempio, il **tasso semestrale** corrispondente a un **tasso nominale convertibile trimestralmente**

$$j_k = j_4 = 0{,}08 \qquad i_k = \frac{j_k}{k} = \frac{0{,}08}{4} = 0{,}02$$

Tasso annuo nominale

- si trova calcolando innanzitutto il **tasso trimestrale** corrispondente

$$j_k = j_4 = 0{,}08 \qquad i_k = \frac{j_k}{k} = \frac{0{,}08}{4} = 0{,}02$$

- poi. Il **tasso trimestrale** trovato va trasformato nel **tasso semestrale corrispondente:**
-

$$j_k = j_4 = 0{,}08 \qquad i_k = \frac{j_k}{k} = \frac{0{,}08}{4} = 0{,}02$$

Tasso annuo nominale

$$\left(1+i_4\right)^4=\left(1+i_2\right)^2$$

$$\left(1+0{,}02\right)^4=\left(1+i_2\right)^2$$

$$\left(1+0{,}02\right)^2-1=i_2$$

$$i_2=\left(1+0{,}02\right)^2-1=0{,}0404$$

Tasso continuo

$$i = \left(1 + \frac{j_k}{k}\right)^k - 1$$

$$i + 1 = \left(1 + \frac{j_k}{k}\right)^k$$

$$(i+1)^{1/k} = \left(1 + \frac{j_k}{k}\right)$$

$$(i+1)^{1/k} - 1 = \frac{j_k}{k} \qquad k\left[(i+1)^{1/k} - 1\right] = j_k$$

Tasso continuo

$$j_k = k\left[\left(i+1\right)^{1/k} - 1\right] =$$

$$j_\infty = \left[\left(i+1\right)^{1/k} - 1\right] / (1/k) =$$