Il programma dell'insegnamento di Geometria 1

Corso di Laurea in Matematica, Università di Cagliari, a. a. 2020/2021

Docente: Beniamino Cappelletti Montano

SPAZI VETTORIALI

Segmenti orientati. Equipollenza. Il concetto di vettore geometrico. Somma di due vettori geometrici. Prodotto di un vettore geometrico per un numero reale. Vettore geometrico opposto. Proprietà delle operazioni di somma di vettori geometrici e prodotto di vettori geometrici per un numero reale. Definizione di campo. Esempi di campo. Definizione di spazio vettoriale su un campo. Unicità del vettore nullo e dell'opposto. $\lambda \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se $\lambda = 0$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Esempi di spazi vettoriali: vettori geometrici, $\{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[x]$. Definizione di sottospazio vettoriale. Un sottoinsieme W di $(V, +, \cdot)$ è sottospazio vettoriale se e solo se $(W, +|_W, \cdot|_W)$ è uno spazio vettoriale. Intersezione di sottospazi vettoriali. L'unione di due sottospazi vettoriali non è un sottospazio vettoriale. Sottospazio somma. $W_1 + W_2$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente W_1 e W_2. Somma diretta. Caratterizzazione della somma diretta. Somma e somma diretta di k sottospazi, $k > 2$. Combinazioni lineari. Chiusura lineare di un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale. $L(X)$ è il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene X. Sistemi di generatori. Spazi vettoriali finitamente generati. Esempi di spazi vettoriali finitamente generati. Esempi di spazi vettoriali non finitamente generati. $L(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = L(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1})$ se e solo se $\mathbf{v}_{k+1} \in L(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$. Vettori linearmente dipendenti e indipendenti. Dati k vettori in uno spazio vettoriale, essi sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi può essere espresso come combinazione lineare dei rimanenti. Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti e $\mathbf{v} \notin L(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$, allora anche i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti. Se i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti allora anche i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \ldots, \mathbf{v}_{n+k}$ sono linearmente dipendenti. Se i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \ldots, \mathbf{v}_{n+k}$ sono linearmente indipendenti, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti. Insiemi linearmente dipendenti e indipendenti. Definizione di base. Esempi: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$, matrici m x n, vettori geometrici nello spazio. Dato $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, esiste un $X' \subseteq X$ tale che X' è linearmente indipendente e $L(X) = L(X')$. Lemma di Steinitz. Metodo degli scarti successivi. Esistenza di una base in uno spazio vettoriale finitamente generato. Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità. Dimensione di uno spazio vettoriale. Dimensione di $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[x]$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, dell'insieme dei vettori geometrici dello spazio. La dimensione come numero massimo di vettori linearmente indipendenti e numero minimo di generatori. Componenti di un vettore rispetto ad una base. Matrici di passaggio. Teorema di completamento ad una base. Esempi di spazi di dimensione infinita. Se V è spazio vettoriale di dimensione finita e W è sottospazio di V, allora $\dim(W) \leq \dim(V)$ e si ha $\dim(W) = \dim(V)$ se e solo se $W = V$. La formula di Grassmann.

MATRICI

Generalità sulle matrici. Matrice trasposta. Matrici diagonali. Somma di matrici. Prodotto di una matrice con uno scalare. L'insieme delle matrici $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Prodotto tra matrici. Proprietà delle operazioni tra matrici. Il prodotto AB è una matrice dello stesso tipo di BA se e solo se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine. Il prodotto tra matrici non è commutativo. Proprietà del prodotto di matrici. La matrice identica è elemento neutro rispetto al prodotto tra matrici. Traccia di una matrice quadrata. Matrici invertibili. Unicità della matrice inversa. Il prodotto di due matrici invertibili è invertibile. Esempi di matrici non invertibili.

DETERMINANTI

Permutazioni. Prodotto di permutazioni. Inversa di una permutazione. Trasposizioni. Decomposizione di una permutazione come prodotto di trasposizioni (senza dimostrazione). Segno di una permutazione. Proprietà del segno di una permutazione: segno del prodotto e dell'inversa (senza dimostrazione). Permutazioni pari e dispari. Corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle permutazioni pari e l'insieme delle permutazioni dispari. Definizione di determinante di una matrice quadrata. Determinante di una matrice di ordine 1, 2 o 3. Proprietà dei determinanti: $\det(I_n) = 1$; $\det(A) = \det(A^t)$; il determinante è nullo se due righe o colonne sono uguali; il determinante cambia segno se si scambiano tra loro due righe; il determinante di una matrice ottenuta sostituendo una riga con la somma di due n-ple; il determinante di una matrice nella quale si moltiplica una riga per uno scalare; se A ha una riga nulla allora $\det(A) = 0$; il determinante non cambia se ad una sua riga si sostituisce la somma di tale riga con una combinazione lineare delle rimanenti righe; $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ per ogni $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$. Teorema di Binet (senza dimostrazione). Sottomatrici e minori. Minori complementari. Complementi algebrici. Primo Teorema di Laplace (senza dimostrazione). Secondo Teorema di Laplace. Una matrice A è invertibile se e solo se $\det(A)$ è diverso da 0. Determinazione della matrice inversa. Matrici simili. Due matrici simili hanno stessa traccia, stesso determinante e stesso polinomio caratteristico.

APPLICAZIONI LINEARI

Definizione di applicazioni lineari. $f: V \to W$ è lineare se e solo se $f(\lambda \mathbf{v} + \lambda' \mathbf{v}') = \lambda f(\mathbf{v}) + \lambda' f(\mathbf{v}')$ per tutti $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ e $f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})$. Esempi di applicazioni lineari e di applicazioni che non sono lineari. Nucleo e immagine di una applicazione lineare. $\ker(f)$ è sottospazio vettoriale di V. $\mathrm{Im}(f)$ è sottospazio vettoriale di W. f è iniettiva se e solo se $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$. Se $V = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ allora $\mathrm{Im}(f) = L(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$. Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti e f è iniettiva allora $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$ sono linearmente indipendenti. Se una applicazione lineare f è biettiva, allora f manda basi di V in basi di W. Isomorfismi. Teorema fondamentale delle applicazioni lineari. Equazione dimensionale. Due spazi vettoriali sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione. Isomorfismo esplicito tra V (spazio vettoriale su $\mathbb{K}$) e $\mathbb{K}^n$. Matrice associata ad una applicazione lineare. Lo spazio vettoriale $L(V,W)$ di tutte le applicazioni lineari da V in W. Isomorfismo tra $L(V,W)$ e l'insieme delle matrici m x n, dove $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$. Applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Matrice della composizione di due applicazioni lineari (senza dimostrazione). Matrice associata ad un isomorfismo. Se $f: V \to V$ e B, B' sono due basi di V, allora $M_{BB}(f)$ e $M_{B'B'}(f)$ sono matrici simili.

SISTEMI LINEARI

Sistemi lineari. Soluzione di un sistema lineare. Sistemi lineari in forma matriciale. Sistemi di Cramer. Rango di una matrice. Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il rango di A è n se e solo se $\det(A) \neq 0$. Se B è una sottomatrice di A allora il rango di B è minore o uguale al rango di A. Il rango di una matrice A è il massimo ordine di un minore di A avente determinante diverso da zero. Teorema di Kronecker sugli orlati (senza dimostrazione). Sistemi lineari e rango: Teorema di Rouché-Capelli. Spazio vettoriale delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. Il rango della matrice associata ad una applicazione lineare f è uguale alla dimensione di $\mathrm{Im}(f)$.

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Definizione di autovalore e autovettori ad esso associato. Autospazi. Gli autospazi sono sottospazi vettoriali. Gli autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. La somma degli autospazi corrispondenti ad autovalori distinti è diretta. Polinomio caratteristico. Il polinomio caratteristico non dipende dalla scelta della matrice associata ad un dato endomorfismo. Coefficienti del polinomio caratteristico (dimostrazione nel caso $n = 2$). Autovalori e radici del polinomio caratteristico. Endomorfismi diagonalizzabili. Matrici diagonalizzabili. Una matrice è diagonalizzabile se e solo se è simile ad una matrice diagonale. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore. Relazioni tra molteplicità algebrica e molteplicità geometrica. Il teorema spettrale. Se il polinomio caratteristico di un endomorfismo f di V, spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, ammette $n = \dim(V)$ radici $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ distinte, allora è diagonalizzabile.

Libri di testo e materiale didattico

Dispense ed esercizi disponibili sul sito del corso, a cura del docente

M.R. Casali, C. Gagliardi, L. Grasselli, Geometria, Esculapio Editore

A. Sanini, Lezioni di Geometria, Levrotto & Bella

L. Grasselli, C. Landi, *Algebra lineare e Geometria, Esercizi risolti e commentati*, Esculapio Editore

A. Sanini, Esercizi di Geometria, Levrotto & Bella