

1 EQUAZIONI DI MAXWELL

Il campo elettromagnetico è un *campo di forze*. Può essere utile utilizzare una definizione operativa di *campo*: diciamo che in una zona dello spazio è presente un campo se è utile associare a ogni punto di tale zona il valore di una o più grandezze fisiche¹. In particolare il campo è un campo di forze se la grandezza fisica è una forza, o una grandezza associata ad una forza. Il caso tipico è il campo gravitazionale: a ogni punto dello spazio attorno alla Terra, associamo un vettore, che è la accelerazione gravitazionale, che mi consente di calcolare la forza agente su un oggetto nel punto conoscendo solo il valore di tale accelerazione.

Caratteristica dei campi di forze è che gli oggetti che subiscono l'azione della forza sono anche quelli che producono il campo. Esempio tipico è il campo elettrostatico. Tale campo è prodotto da cariche elettriche, e solo cariche elettriche poste in un campo elettrostatico subiscono una forza a causa del campo.

Il campo elettromagnetico agisce su cariche e correnti, e pertanto viene prodotto da cariche e correnti. Le leggi che regolano tale campo, e che lo collegano alle sorgenti, sono state viste nei corsi di Fisica e sono

- legge di Faraday;
- legge di Ampère (generalizzata);
- legge di Gauss;
- *legge di Gauss magnetica*, ovvero assenza di cariche magnetiche libere;
- conservazione della carica elettrica.

Le equazioni di Maxwell sono la formulazione matematica delle prime quattro leggi, e qui sono date come postulati nella forma che segue.

Le leggi di Faraday e Ampère sono

$$\begin{aligned}\oint_c \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_c \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} &= I_S + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}\tag{1}$$

essendo c una curva chiusa e S una superficie aperta che si appoggia su c (vedi Fig. 1). Le due leggi di Gauss sono invece

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} &= Q_V \\ \oint_{\partial V} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

essendo V un volume, racchiuso dalla superficie ∂V .

¹ Ad esempio, parleremo di campo di velocità dell'acqua di un canale se siamo interessati al valore di tale velocità punto per punto

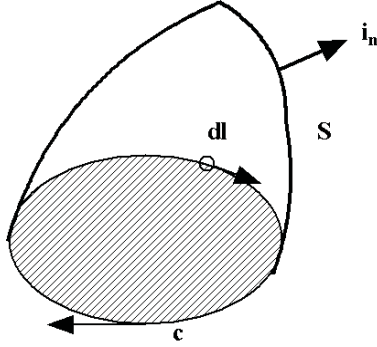


Fig. 1: Superficie e contorno

Nelle (1,2), \mathbf{e} è il vettore campo elettrico e si misura in $[\text{V}/\text{m}]$, \mathbf{b} è il vettore induzione magnetica $[\text{Wb}/\text{m}^2]$, \mathbf{h} è il vettore intensità di campo magnetico $[\text{A}/\text{m}]$, e \mathbf{d} è il vettore induzione elettrica $[\text{C}/\text{m}^2]$. Tutte queste grandezze sono dei campi. Pertanto esse sono funzioni della posizione \mathbf{r} e del tempo t in cui sono calcolate, funzioni almeno integrabili nello spazio.

Le sorgenti del campo sono costituite dalla corrente elettrica I_S che attraversa la superficie S , e che si misura in $[A]$, e dalla carica elettrica Q_V contenuta nel volume V , che si misura in $[C]$. Tra queste ultime vale la equazione di continuità della carica²

$$I_{\partial V} + \frac{d}{dt} Q_V = 0 \quad (3)$$

dove $I_{\partial V}$ è la corrente che esce dal volume V (e quindi attraversa la superficie ∂V).

Notiamo esplicitamente che non abbiamo affermato che le (1) valgono per qualunque c ed S , né le (2) per qualunque V . Infatti queste affermazioni non sono vere. Le equazioni (1,2,3) sono equazioni macroscopiche e quindi concettualmente diverse dalle equazioni di Maxwell microscopiche, che legano campi nel vuoto e cariche elementari.

Consideriamo la legge di Gauss, ovvero la prima delle (2). Se consideriamo un volume V' leggermente diverso da V , il flusso al primo membro cambia, ma la differenza tra i flussi su ∂V e su $\partial V'$ tende a zero con continuità se V' tende a V . Ci dobbiamo quindi aspettare che anche $Q_{V'}$ tenda con continuità a Q_V . Tuttavia se il volume V non è **sufficientemente grande** da contenere molte cariche³ questo non avviene. Infatti la carica è distribuita in particelle e quindi Q_V risulta proporzionale al numero N_p di particelle. Nello spostamento di ∂V , il numero di particelle varia in modo discreto, e quindi la carica non può variare con continuità. Ovviamente, se N_p è molto grande, la variazione a scalini può tranquillamente essere approssimata con una continua, ma per N_p piccolo, la variazione discontinua resta.

Ne segue che le due equazioni (2) richiedono che il volume sia **macroscopico**, ovvero abbastanza grande⁴.

² In realtà si dimostra che la continuità della carica è una conseguenza delle leggi di Ampère e Gauss.

³ Questo discorso sul significato di *Equazioni di Maxwell macroscopiche* è necessariamente approssimativo, pur fornendo una ragionevole comprensione delle differenze tra equazioni microscopiche e macroscopiche. Nonché, ed è probabilmente più importante, una chiave per valutare, nella maggioranza dei casi, se le equazioni macroscopiche sono utilizzabili.

⁴ La cosa è concettualmente analoga anche per le (1), ma è più complessa dal punto di vista formale, e ne parleremo dopo.

Oltre alla carica totale in un volume, ha interesse anche domandarsi come questa carica è distribuita nello spazio. Per valutare la carica presente vicino al punto generico \mathbf{r} possiamo considerare un piccolo volume ΔV centrato su \mathbf{r} e definire una *densità di carica* $\rho(\mathbf{r}, t)$ nel punto \mathbf{r} come

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{Q_{\Delta V}(t)}{\Delta V} \quad (4)$$

che ovviamente dipende dalla scelta di ΔV . A questo punto sarebbe intuitivo passare, nella (4), al limite per $\Delta V \rightarrow 0$. Tuttavia, se questa densità di carica deve essere usata nelle Equazioni di Maxwell, il volume ΔV deve essere macroscopico, e quindi non può tendere a zero. Se però ΔV è sufficientemente piccolo, la (4) risulta indipendente da ΔV .

Anche i campi delle (1,2) sono campi medi, e con la media calcolata su volumi ΔV macroscopici. Questo però pone un problema nell'uso delle (1,2). I campi hanno una scala di variazione spaziale (che normalmente è la lunghezza d'onda): i campi in due punti \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 non troppo vicini devono essere indipendenti. E quindi i due volumi, centrati rispettivamente in \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , devono essere distinti. Ne segue che i volumi utili per fare le medie, sia dei campi sia delle sorgenti, come la (4), devono contemporaneamente essere sufficientemente grandi da essere macroscopici, ma sufficientemente piccoli rispetto alla scala di variazione del campo. Solo se tali volumi esistono, le equazioni di Maxwell macroscopiche (1,2) possono essere usate. Poiché la scala di variazione spaziale del campo dipende dalla frequenza, le equazioni macroscopiche sono utilizzabili per onde radio, microonde e infrarossi, e anche, quasi sempre, per le onde luminose e il vicino ultravioletto. Non possono, invece, essere usate per il lontano ultravioletto (se non in casi particolari), né per i raggi X e γ .

Si noti che la distinzione tra equazioni macroscopiche e microscopiche dipende dalla presenza di mezzi materiali. Quindi tale distinzione cade nel caso del vuoto, dove le (1) possono sempre essere usate.

Assumendo che le equazioni macroscopiche possano essere usate, i campi sono ora funzioni regolari del punto, e quindi possono essere manipolate secondo le normali regole dell'analisi, mentre dalla (4) segue

$$Q_V(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad (5)$$

Il discorso su I è simile a quello su Q . La corrente attraverso una superficie ΔS , macroscopica, dipende dalla normale \mathbf{i}_n alla superficie stessa. La corrente quindi può variare non solo se ΔS cambia posizione, dimensione o forma, ma anche se varia la normale (ovvero se la superficie ruota rigidamente). Si trova che il rapporto tra la corrente, scelta positiva in direzione di \mathbf{i}_n , e ΔS varia con \mathbf{i}_n come la componente di un vettore, e si può quindi definire una densità di corrente \mathbf{j} come

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_n = \frac{I_{\Delta S}(t)}{\Delta S} \quad (6)$$

purché la superficie ΔS sia macroscopica. Segue allora

$$I_{\Delta S}(t) = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{i}_n dS = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{dS} \quad (7)$$

Le densità di carica e di corrente si misurano rispettivamente in $[C/m^3]$ e $[A/m^2]$. Si noti che una corrente è un moto di cariche. Pertanto tra \mathbf{j} e ρ vale la relazione

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

essendo \mathbf{v} il *campo di velocità* delle cariche in moto che costituiscono la corrente.

Introducendo le densità di carica e di corrente, le (1,2,3) diventano

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_c \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} &= \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_{\partial V} \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \\ \oint_{\partial V} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Nelle leggi di Faraday e Ampère è presente una derivata del flusso (rispettivamente di \mathbf{b} e di \mathbf{d}) attraverso la superficie S : Questa derivata indica che un campo elettrico o magnetico si genera se il flusso di \mathbf{b} o di \mathbf{d} varia, qualunque sia la causa: variazione temporale delle sorgenti, moto delle sorgenti o di c , deformazione o rotazione di c . Analogamente si ha per la continuità della carica. Se però c , S e V sono fissati allora le (8) diventano

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} &= - \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_c \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_{\partial V} \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \\ \oint_{\partial V} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} + \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) dV &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

2 CONTINUITÀ DEI CAMPI

Consideriamo una superficie di separazione tra due regioni, come in Fig. 1. Scegliamo un verso della normale \mathbf{i}_n orientata dalla regione 1 alla 2, e consideriamo un volume cilindrico con base un cerchio ΔS di raggio R_b , e di altezza Δh , entrambe piccole.

Applicando la legge di Gauss a questo cilindro si ha:

$$\oint \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} = \int_{B2} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} + \int_{B1} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} + \int_{SL} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

essendo $B1$ e $B2$ le due basi del cilindro e SL la superficie laterale (di area $2\pi R_b \Delta h$). Sulle due basi del cilindro \mathbf{dS} , orientato come la normale uscente dal cilindro di Fig. 1, vale (ricordando che \mathbf{i}_n é stata già definita preliminarmente in Fig. 1)

$$\begin{cases} \mathbf{dS} = -\mathbf{i}_n dS & \text{su } B1 \\ \mathbf{dS} = \mathbf{i}_n dS & \text{su } B2 \end{cases}$$

e sostituendo

$$\int_{B2} \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_n dS + \int_{B1} \mathbf{d} \cdot [-\mathbf{i}_n] dS + \int_{SL} \mathbf{d} \cdot \mathbf{dS} = Q$$

Se ΔS è sufficientemente piccolo, possiamo assumere \mathbf{d} costante su ciascuna delle basi, ovviamente con valori diversi sulle due basi, che indichiamo con \mathbf{d}_2 e \mathbf{d}_1 rispettivamente. Allora $\mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_n$ va fuori dall'integrale e segue

$$\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{i}_n \Delta S - \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{i}_n \Delta S + \int_{SL} \mathbf{d} \cdot \mathbf{dS} = Q \quad (10)$$

L'ultimo integrale a primo membro è limitato da $2\pi R_b \Delta h \cdot \max[|\mathbf{d}|]$. Se facciamo, nella (10), tendere $\Delta h \rightarrow 0$, tale integrale va a zero.

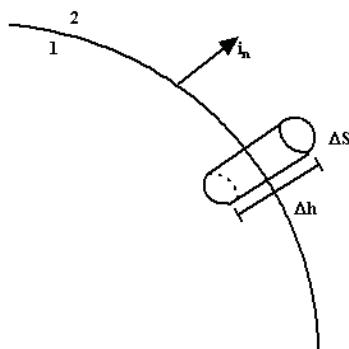


Fig. 1: Superficie di separazione tra due regioni 1 e 2

Invece, l'integrale a secondo membro, per $\Delta h \rightarrow 0$, è nullo solo se non vi sono densità superficiali di carica ρ_s (cariche distribuite solo alla superficie). Si ha

$$\begin{aligned} (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) \cdot \mathbf{i}_n &= \rho_s \\ (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{i}_n &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

e dall'equazione di continuità,

$$(\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) \cdot \mathbf{i}_n = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_s$$

Consideriamo ora un percorso rettangolare, come in Fig. 2, centrato sulla superficie di separazione tra le due regioni 1 e 2. Dalla legge di Ampère (se Δl e Δh sono piccoli) si ha, fissato un \mathbf{i}_b sulla superficie (generico) e un conseguente \mathbf{i}_t

$$\mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{i}_t \Delta l - \int_C^D \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_n dl - \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{i}_t \Delta l + \int_A^B \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_n dl = I + \Delta l \frac{d}{dt} \int \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_b dl \quad (12)$$

in quanto, per la piccolezza di Δl , possiamo assumere \mathbf{h} costante sui due lati BC e DA .

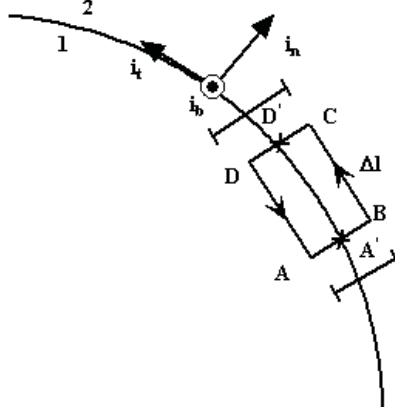


Fig. 2: Superficie di separazione tra due regioni 1 e 2

L'ultimo integrale è limitato da $\Delta l \Delta h \cdot \max \left[\left| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_n \right| \right]$ e quindi tende a zero con Δh . Analogamente gli integrali su AB e CD . Resta allora

$$\Delta l (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_t = I$$

In assenza di correnti superficiali il secondo membro è nullo. Si dice corrente superficiale una $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s \cdot \delta(s)$. Fisicamente equivale ad un flusso di particelle concentrato in un volume di spessore paragonabile al raggio delle particelle stesse (e quindi considerabile nullo). In presenza di tali correnti si ha $(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_t = \mathbf{j}_s \cdot \mathbf{i}_b$ (l'integrale vale $1/\Delta l$ per la corrente che fluisce attraverso la linea $A'D'$). Ma \mathbf{i}_b è arbitrario, mentre $\mathbf{i}_t = \mathbf{i}_b \times \mathbf{i}_n$ e quindi

$$\mathbf{j}_s \cdot \mathbf{i}_b = (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_b \times \mathbf{i}_n = \mathbf{i}_n \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_b$$

per qualsiasi \mathbf{i}_b . Segue

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) = \mathbf{j}_s \quad (13)$$

Analogamente

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = 0 \quad (14)$$

Le (13,14) costituiscono la forma generale delle condizioni di continuità dei campi tangenti ad una superficie, di cui \mathbf{i}_n è la normale (orientata dal lato 1 al lato 2).

3 EQUAZIONI DI MAXWELL IN FORMA DIFFERENZIALE

Le equazioni di Maxwell (8) considerate finora sono dette *equazioni in forma integrale* e costituiscono la forma più generale di queste equazioni. Tuttavia il loro utilizzo è in genere poco diretto. Si usano al loro posto le *equazioni in forma differenziale*, che collegano direttamente le variazioni dei campi punto per punto, ma che sono valide solo al di fuori di superfici di discontinuità.

Per ricavarle consideriamo ad esempio la legge di Faraday. Per il teorema di Stokes, l'integrale di linea del campo \mathbf{e} può essere espresso come flusso del rotore di \mathbf{e} esteso alla stessa superficie \mathcal{S} su cui calcoliamo il flusso di \mathbf{b} :

$$\int_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{e} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (15)$$

Possiamo portare tutti i termini a primo membro

$$\int_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{e} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{S}} \left[\nabla \times \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (16)$$

e ottenere quindi un integrale che è nullo **qualunque sia** la superficie di integrazione \mathcal{S} . Questa condizione implica che l'integrando (se continuo, come nel nostro caso) è nullo. Allo stesso modo si opera sulla legge di Ampère, ottenendo

$$\int_{\mathcal{S}} \left[\nabla \times \mathbf{h} - \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} - \mathbf{j}_{tot} \right] \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (17)$$

Nella (17) si è indicato con \mathbf{j}_{tot} la densità totale di corrente elettrica. Ricordiamo infatti che la densità di corrente è costituita da cariche in moto. Questo moto può essere dovuto a due cause diverse:

- forze esterne al campo elettromagnetico che stiamo considerando;
- forze esercitate dal campo descritto dalle equazioni di Maxwell.

Di conseguenza possiamo dividere la densità di corrente totale in due parti, dette rispettivamente densità di corrente *impressa* \mathbf{j} e densità di corrente *indotta* o sostenuta dal campo \mathbf{j}_i :

$$\mathbf{j}_{tot} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_i \quad (18)$$

Entrambe le correnti risultano essere sorgenti del campo elettromagnetico. Tuttavia, mentre la corrente indotta risulta una incognita del problema, quella impressa è da considerare un dato (\mathbf{j} è cioè un termine noto delle equazioni di Maxwell).

Per la legge di Gauss (e la analoga magnetica), nonché per la conservazione della carica, si procede in maniera simile, ma utilizzando il teorema della divergenza:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{d} dV = \int_V \rho_{tot} dV \quad \implies \quad \int_V [\nabla \cdot \mathbf{d} - \rho_{tot}] dV = 0 \quad (19)$$

In definitiva si ottiene

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{e} &= -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{h} &= \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{j}_{tot} \\
\nabla \cdot \mathbf{d} &= \rho_{tot} \\
\nabla \cdot \mathbf{b} &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{j}_{tot} + \frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} &= 0
\end{aligned}
\tag{20}$$

Se calcoliamo la divergenza delle prime due equazioni otteniamo (tenendo conto della quinta)

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \mathbf{d} - \rho_{tot}] = 0$$

In altri termini, le due leggi di Gauss sono essenzialmente delle *condizioni iniziali*, ovvero fissano il valore di una grandezza che è costante nel tempo. Pertanto, esse hanno un contenuto informativo trascurabile, e le equazioni di Maxwell indipendenti sono soltanto due:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{e} &= -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{h} &= \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{j}_i + \mathbf{j}
\end{aligned}
\tag{21}$$

Le (21) contengono però cinque incognite (\mathbf{e} , \mathbf{h} , \mathbf{d} , \mathbf{b} , \mathbf{j}_i). Sono quindi necessarie 3 relazioni vettoriali tra i vettori di campo per rendere determinato il problema.

D'altra parte, le equazioni di Maxwell nella forma (21) devono essere indeterminate, in quanto, fissate le sorgenti, il campo deve necessariamente dipendere dal materiale in cui si sviluppa ma deve anche essere soluzione delle (21). Poiché al variare del materiale, varierà il campo ma dovrà restare soluzione delle equazioni di Maxwell, allora le (21) devono essere indeterminate.

Le considerazioni precedenti ci dicono anche che per rendere determinato il problema occorre aggiungere tre relazioni vettoriali tra i vettori di campo che descrivono il comportamento elettromagnetico del materiale in cui il campo si sviluppa (*relazioni costitutive*). Ricordiamo infatti che i costituenti microscopici del materiale subiscono l'azione del campo elettromagnetico *esterno* modificandosi (polarizzazione dei dielettrici e dei materiali magnetici) e cambiando il loro stato di moto (correnti di conduzione). A sua volta queste modificazioni danno luogo a correnti e cariche che producono un campo ulteriore, che dipende dalla natura del materiale. Le relazioni costitutive traducono matematicamente l'effetto di queste modificazioni.

4 FORZA DI LORENTZ E POTENZA

Per completare la descrizione del campo elettromagnetico, occorre l'espressione della forza che questo esercita sulle sorgenti del campo, che nel caso macroscopico sono \mathbf{j}_{tot} e ρ , da cui poi derivare energia e potenza associate alla interazione campo-correnti.

Dalla fisica è noto che una particella *puntiforme* immersa in un campo elettromagnetico subisce una forza, data dalla espressione della forza di Lorentz, che coinvolge i campi microscopici. Tale relazione deve essere però riscritta nel caso di problemi macroscopici, in cui non siamo interessati alla forza su una carica puntiforme, ma alla forza che viene esercitata da un campo macroscopico su una distribuzione di cariche e di correnti. Tale relazione, che chiameremo ancora forza di Lorentz, e che diamo anch'essa come postulato, è

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{e} + \mathbf{j}_{tot} \times \mathbf{b} \quad (22)$$

dove \mathbf{f} è la densità di forza. Quindi $\mathbf{f} dV$ è la forza che agisce sul volume elementare macroscopico dV , mentre la forza (più precisamente, la *risultante delle forze*) che agisce su un volume V vale¹

$$\int_V \mathbf{f} dV$$

Tenendo conto che la corrente è costituita da cariche in moto : $\mathbf{j}_{tot} = \rho \mathbf{v}_{tot}$ si ha

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{e} + \rho \mathbf{v}_{tot} \times \mathbf{b} \quad (23)$$

in cui \mathbf{v}_{tot} è dovuta sia alle forze esterne, sia al campo elettromagnetico (si veda il paragrafo precedente).

La forza di Lorentz, agendo su cariche in moto, fornisce potenza a queste cariche. La relativa densità volumetrica di potenza si ottiene moltiplicando scalarmente la densità di forza (23) per la velocità \mathbf{v}_{tot} :

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{tot} = (\rho \mathbf{e} + \rho \mathbf{v}_{tot} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}_{tot} = \rho \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_{tot} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_{tot} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i \quad (24)$$

in quanto il termine con \mathbf{b} non contribuisce, per le proprietà del prodotto misto.

I due termini finali della (24) sono, rispettivamente, la densità volumetrica della potenza che il campo fornisce alle correnti impresse, e quella che il campo fornisce alle correnti indotte per tenerle in moto. Integrando su di un volume V si ottiene la potenza totale che campo fornisce alle correnti nel volume V

$$\int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{tot} dV = \int_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} dV + \int_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i dV$$

L'ultimo termine a secondo membro, come vedremo più avanti, è un termine di *dissipazione*. Il primo termine è invece più interessante. Infatti, il suo opposto

$$p_C(t) = - \int_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} dV \quad (25)$$

è la potenza che le correnti impresse forniscono al campo (ovviamente prendendola dalle loro sorgenti primarie). In altri termini è la potenza che il campo riceve, e che, come vedremo più avanti, possiamo utilizzare.

¹ Analogamente si procede se interessa il momento risultante di tutte le forze.

5 RELAZIONI COSTITUTIVE

Abbiamo visto che per rendere determinato il problema occorre aggiungere tre relazioni vettoriali tra i vettori di campo che descrivono il comportamento elettromagnetico del materiale in cui il campo si sviluppa, dette *relazioni costitutive*, costruite tenendo conto del mezzo in cui si sviluppa il campo.

Assumiamo, per convenzione, che le tre equazioni mancanti forniscano \mathbf{d} , \mathbf{b} , \mathbf{j} in funzione delle cause \mathbf{e} , \mathbf{h} . In alternativa (ma equivalentemente), possiamo introdurre la polarizzazione \mathbf{p} e la magnetizzazione \mathbf{m} , definite da

$$\mathbf{d} = \varepsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p} \qquad \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h} + \mu_0 \mathbf{m} \qquad (26)$$

e usare relazioni costitutive che forniscono \mathbf{p} , \mathbf{m} , \mathbf{j} in funzione delle cause \mathbf{e} , \mathbf{h} . In tal modo le grandezze derivate sono solo la risposta del mezzo (e si annullano nel vuoto). Ovviamente le due descrizioni sono del tutto equivalenti (stante la definizione (26)) e quindi talvolta si usano anche descrizioni *miste*.

Ovviamente ogni mezzo materiale ha il suo proprio insieme di equazioni costitutive, ma è possibile classificare tali equazioni costitutive in base alle proprietà che soddisfano e studiare quindi il campo in un mezzo che gode di certe proprietà (lasciandone i parametri non specificati).

Possiamo dividere le proprietà di un qualunque mezzo materiale in proprietà di simmetria e proprietà *strutturali*. Le proprietà di simmetria derivano dalla esistenza di particolari simmetrie (invarianze) delle proprietà del mezzo, che debbono riflettersi in proprietà delle relazioni costitutive. Invece le proprietà strutturali sono proprietà (semplificatrici) della forma matematica delle relazioni, che però derivano, ovviamente, da sottostanti proprietà fisiche.

6 PROPRIETÀ STRUTTURALI

Tra le proprietà strutturali hanno notevole importanza l'indipendenza da una delle due cause e la linearità.

Per la gran parte dei mezzi materiali si ha che \mathbf{b} dipende solo da \mathbf{h} , mentre \mathbf{d} e \mathbf{j} solo da \mathbf{e} . E' evidente che si stanno trascurando, ad esempio, i mezzi chirali, in cui \mathbf{b} e \mathbf{d} dipendono sia da \mathbf{e} sia da \mathbf{h} ¹.

Consideriamo allora la relazione tra \mathbf{d} (oppure \mathbf{p}) ed \mathbf{e} (che è quella dal comportamento più vario), ma anche per le altre valgono discorsi analoghi.

Si dice che il mezzo è lineare se, ad una qualunque combinazione lineare delle cause corrisponde una combinazione lineare degli effetti con gli stessi coefficienti.

Un mezzo è lineare se e solo se tutte le relazioni sono lineari. (Ovviamente in un mezzo non lineare due possono esserlo e una no, e così via)

¹ Se il mezzo è lineare, vedi dopo, anche in questi casi valgono sostanzialmente tutti i ragionamenti che seguono, che saranno però da applicare a una somma di relazioni.

Se si assume anche che il mezzo sia stabile (ovvero l'effetto tenda a zero se la causa tende a zero) è possibile allora scrivere la relazione tra \mathbf{p} ed \mathbf{e} in forma di integrale generalizzato²

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathcal{G}}(\mathbf{r}; t, t') \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}, t') dt' \quad (27)$$

dove $\underline{\mathcal{G}}$ è una matrice 3x3 di funzioni³ che si annullano in modo sufficientemente rapido all'infinito.

Ovviamente tutti i materiali sono, a rigori, non lineari in quanto, per campi sufficientemente intensi si ha la scarica disruptiva. Allo stesso tempo, per opportuni intervalli di variazione di \mathbf{e} , ogni mezzo soddisfa a una relazione costitutiva lineare (fa eccezione solo il vuoto che, nell'ambito della fisica classica, è sempre lineare).

In altri termini studiamo come mezzi lineari quei mezzi che non hanno soglia (per campi di interesse) e che non vengono sollecitati con campi così intensi da provocare effetti di saturazione o di rottura del dielettrico. Esempi di mezzi non lineari sono

$$\mathbf{p} = \chi \left[\int |\mathbf{e}|^2 dt' \right] \mathbf{e} \quad \mathbf{d} = \varepsilon_0 \frac{\mathbf{e}}{1 + \frac{|\mathbf{e}|^2}{E_M^2}}$$

con χ ed E_M costanti. Nel primo caso, in particolare, i coefficienti della combinazione lineare sono diversi. Notiamo però, nel secondo caso, che se $|\mathbf{e}| \ll E_M$, il mezzo può essere considerato lineare.

Prima di passare altre proprietà (che, salvo per la definizione, saranno discusse solo nel caso lineare), conviene esaminare il significato di $\underline{\mathcal{G}}$. Per un ingresso impulsivo si ha

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\delta(t - t_0) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{p} = \underline{\mathcal{G}}(\mathbf{r}; t, t_0) \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \quad (28)$$

Quindi $\underline{\mathcal{G}}$ è la risposta impulsiva (generalizzata per tener conto che ingresso e uscita sono vettori) del mezzo in esame.

La richiesta di causalità (l'effetto non può precedere la causa) implica che:

$$\underline{\mathcal{G}}(\mathbf{r}; t, t_0) = 0 \quad \text{se} \quad t < t_0 \quad (29)$$

Una ulteriore importante proprietà strutturale è la non dispersività. - Un mezzo si dice non dispersivo nel tempo (istantaneo) se l'effetto dipende solo dalla causa nel medesimo istante. In tal caso nella relazione tra \mathbf{p} ed \mathbf{e} non vi è alcun integrale (o, equivalentemente, $\underline{\mathcal{G}}$ ha, come fattore, $\delta(t - t')$):

$$\underline{\mathcal{G}}(\mathbf{r}; t, t') = \varepsilon_0 \chi(\mathbf{r}; t) \delta(t - t') \quad \implies \quad \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \chi(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \quad (30)$$

² Stiamo trascurando i mezzi *non locali*, ovvero quelli in cui la polarizzazione in un dato punto dipende dal campo elettrico anche in altri punti (e quindi, nella relazione tra \mathbf{e} e \mathbf{p} , è presente anche un integrale spaziale). Si ha un mezzo non locale quando vi sono moti di cariche libere dovute a cause diverse dal campo elettrico (metalli, soluzioni elettrolitiche, plasmi). Oppure quando la lunghezza d'onda è paragonabile alle dimensioni atomiche (es., ultravioletto) perché allora sono i *moti* elettronici interatomici a portare altrove l'effetto di \mathbf{e} . Nei casi di nostro interesse, tale fenomeno è in genere assente, o trascurabile

³ Gli elementi di $\underline{\mathcal{G}}$ possono, più in generale, essere distribuzioni. Ad esempio, la relazione tra \mathbf{d} ed \mathbf{e} nel vuoto può essere espressa nella forma precedente, usando come $\underline{\mathcal{G}}$ una matrice diagonale i cui elementi sono delle delta di Dirac.

dove la matrice χ é la *suscettività* del materiale.

Poiché l'interazione campo-materiale che ne determina le proprietà dielettriche avviene come reazione del campo sul moto dei costituenti elementari, sarà sempre presente un effetto di inerzia e quindi una dispersività nel tempo. La sua importanza dipende dalla velocità di variazione del campo: per frequenze molto basse la risposta si può assumere, in genere, istantanea (almeno per costituenti in qualche modo legati) e a frequenze elevate si può assumere nulla (assenza di effetti dielettrici). Tra questi due estremi il mezzo va invece considerato dispersivo.

7 PROPRIETÀ DI SIMMETRIA

Consideriamo ora le proprietà di simmetria, ovvero di invarianza rispetto alle trasformazioni spaziali e temporali. Un mezzo si dice:

- **Stazionario** (omogeneo nel tempo) se ad una traslazione *temporale* della causa corrisponde una uguale traslazione dell'effetto
- **Omogeneo nello spazio** se ad una traslazione *spaziale* della causa corrisponde una uguale traslazione dell'effetto
- **Isotropo** se a una rotazione della causa corrisponde una uguale rotazione dell'effetto

L'esistenza di proprietà di simmetria ha evidentemente dei riflessi sulle relazioni costitutive.

Isotropia

Per quanto riguarda l'isotropia, questa si ha se, nel materiale, tutte le direzioni sono equivalenti. Sono quindi isotropi i fluidi e tutti gli aggregati amorfi con costituenti piccoli rispetto alla scala di variazione del campo. Sono inoltre isotropi alcuni materiali cristallini; quasi tutti gli altri cristalli sono invece anisotropi. Inoltre cause esterne, come campi elettrici e magnetici statici o anche deformazioni meccaniche possono distruggere l'isotropia introducendo una direzione preferenziale nel materiale.

Il problema delle conseguenze dell'isotropia è complicato dalla presenza della dispersione. Cominciamo pertanto a discutere del caso non dispersivo.

In tal caso l'effetto in un punto prefissato, che assumiamo come origine, dipende solo dalla causa nello stesso punto. Per un mezzo non dispersivo la causa di $\mathbf{p}(\mathbf{0}, t_0)$ è quindi un vettore $\mathbf{e}(\mathbf{0}, t_0)$. Se il mezzo è isotropo, allora a una qualunque rotazione della causa $\mathbf{e}(\mathbf{0}, t_0)$, attorno a un'asse nell'origine, corrisponde la stessa rotazione dell'effetto $\mathbf{p}(\mathbf{0}, t_0)$. In tal caso si dimostra che l'effetto è sempre allineato con la causa (e questo indipendentemente dalla linearità del mezzo). La dimostrazione è fatta per assurdo e può seguire due strade:

- a) Eseguiamo una rotazione di π attorno all'asse individuato da $\mathbf{e}(\mathbf{0}, t_0)$. In tal caso il vettore $\mathbf{e}(\mathbf{0}, t_0)$ non varia. Se, per assurdo, il vettore $\mathbf{p}(\mathbf{0}, t_0)$ non fosse allineato con $\mathbf{e}(\mathbf{0}, t_0)$, allora dovrebbe variare. Ne seguirebbe che a uno stesso $\mathbf{e}(\mathbf{0}, t_0)$ corrisponderebbero due diverse polarizzazioni il che è assurdo.
- b) Se il mezzo è isotropo, tutte le direzioni nel piano ortogonale ad $\mathbf{e}(\mathbf{0}, t_0)$ sono equivalenti. Per simmetria quindi, $\mathbf{p}(\mathbf{0}, t_0)$ non può che avere componente nulla in questo piano (se avesse una componente diversa da zero, questa individuerrebbe una direzione sul piano, contro l'ipotesi di isotropia).

Per un mezzo dispersivo nel tempo, la causa di $\mathbf{p}(\mathbf{0}, t_0)$ è il campo $\mathbf{e}(\mathbf{0}, t')$ con $\forall t' < t_0$, e questo campo, nel tempo, può cambiare direzione. Pertanto la dimostrazione precedente non vale più e quindi causa ed effetto, in un mezzo isotropo ma dispersivo nel tempo, non sono necessariamente allineati. Se però $\mathbf{e}(\mathbf{0}, t')$, con $\forall t' < t_0$, ha sempre la stessa direzione, allora lo stesso ragionamento di prima mostra che anche $\mathbf{p}(\mathbf{0}, t_0)$ ha la stessa direzione.

Ricapitolando, se il mezzo (lineare o non lineare) è isotropo valgono le seguenti relazioni logiche

isotropo e non dispersivo $\implies \mathbf{p}, \mathbf{d}$ ed \mathbf{e} allineati

isotropo e dispersivo $\implies \mathbf{p}, \mathbf{d}$ ed \mathbf{e} allineati, purché \mathbf{e} non cambi direzione

Si dimostra che se un mezzo è *lineare*, e causa ed effetto sono sempre allineati (independentemente dal motivo per cui ciò avviene), allora $\underline{\mathcal{G}}$ è una matrice proporzionale a quella identica $\underline{\mathcal{I}}$ e può quindi essere sostituita con uno scalare:

$$\underline{\mathcal{G}} = g \underline{\mathcal{I}} \quad \implies \quad \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{r}; t, t') \mathbf{e}(\mathbf{r}', t') dt' \quad (31)$$

Poiché questo risultato non richiede l'isotropia, ma solo l'allineamento, si è quindi anche dimostrato che se un mezzo è lineare, e si ha sempre allineamento, allora $\underline{\mathcal{G}}$ è proporzionale ad $\underline{\mathcal{I}}$, vale quindi la (31) e questo mezzo è anche isotropo. Se però il mezzo è non lineare, questo non è più vero. Basta considerare che se

$$\mathbf{d} = \varepsilon_0 \frac{|\mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_x|^2}{E_M^2} \mathbf{e}$$

\mathbf{p}, \mathbf{d} ed \mathbf{e} sono sempre allineati ma il mezzo non è isotropo.

Omogeneità

Fisicamente ogni sistema isolato all'equilibrio è stazionario. Mezzi non stazionari sono quindi dovuti a cause esterne che includiamo per comodità nelle relazioni costitutive. Un esempio tipico è la dipendenza dalla temperatura delle relazioni costitutive: se facciamo variare T dall'esterno con legge nota il mezzo diviene non stazionario. Viceversa ogni materiale è, su scala atomica, non omogeneo a causa della natura atomica delle fluttuazioni. Se però la scala di variazione del campo è grande rispetto alla scala atomica possiamo considerare il materiale omogeneo (a meno che non sia intenzionalmente non omogeneo, come materiali plastici riempiti di sferette di vetro).

Se un mezzo è stazionario, allora $\underline{\mathcal{G}}(\mathbf{r}; t, t')$ non dipende separatamente da t e t' , ma solo dalla differenza $t - t'$. Per dimostrarlo consideriamo una causa qualunque $\mathbf{e}_0(t)$ e il corrispondente effetto $\mathbf{p}_0(t)$. Si ha allora¹ $\forall \mathbf{r}, \tau$ e considerando per semplicità il mezzo isotropo:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t, t') \mathbf{e}_0(t') dt' \\ \mathbf{p}_0(t + \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t + \tau, t') \mathbf{e}_0(t') dt' \end{aligned} \quad (32)$$

Trasliamo ora la causa di $-\tau$, ovvero consideriamo come causa $\mathbf{e}_0(t - \tau)$. La polarizzazione corrispondente vale $\int g(t, t') \mathbf{e}_0(t' - \tau) dt'$ e, se il mezzo è omogeneo, tale polarizzazione

¹ In questa dimostrazione non indichiamo per semplicità la dipendenza spaziale

deve essere uguale a $\mathbf{p}_0(t)$ traslato di $-\tau$, ovvero a $\mathbf{p}_0(t - \tau)$. Dall'uguaglianza delle due espressioni di $\mathbf{p}_0(t - \tau)$ segue

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau, t') \mathbf{e}_0(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, t') \mathbf{e}_0(t' - \tau) dt' \quad \forall \tau \quad (33)$$

Nel secondo integrale poniamo $t'' = t' - \tau$, e portiamo tutto al primo membro

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau, t') \mathbf{e}_0(t') dt' - \int_{-\infty}^{\infty} g(t, t'' + \tau) \mathbf{e}_0(t'') dt'' &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} [g(t - \tau, t') - g(t, t' + \tau)] \mathbf{e}_0(t') dt' &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Questa relazione vale per ogni \mathbf{e}_0 e per ogni t, τ . Possiamo allora scegliere $\mathbf{e}_0(t')$ uguale alla quantità in parentesi moltiplicato per un vettore costante, e si ottiene a primo membro l'integrale di una grandezza non negativa

$$\int_{-\infty}^{\infty} [g(t - \tau, t') - g(t, t' + \tau)]^2 dt' = 0 \quad \forall t, \tau \quad (35)$$

Questo integrale può essere nullo solo se l'integrando è nullo, e segue

$$g(t - \tau, t') = g(t, t' + \tau) \quad \forall t, t', \tau \quad (36)$$

Scelto $t' = 0$ segue

$$g(t, \tau) = g(t - \tau, 0) \quad \forall t, \tau$$

Per mezzi anisotropi la dimostrazione é analoga e consente di concludere che

$$\underline{\mathcal{G}}(t, \tau) = \underline{\mathcal{G}}(t - \tau, 0) \quad \forall t, \tau \quad (37)$$

ovvero la tesi.

Se poi il mezzo è anche non dispersivo si ha (vedi (30)) $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ ovvero $\boldsymbol{\chi}$ non dipende dal tempo.

Analogamente, in un mezzo omogeneo nello spazio, $\boldsymbol{\chi}$ è indipendente da \mathbf{r} .

Il caso più semplice di mezzo è il vuoto in cui non vi sono costituenti microscopici. Le relazioni costitutive prendono allora la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \varepsilon_0 \mathbf{e} \\ \mathbf{b} &= \mu_0 \mathbf{h} \\ \mathbf{j}_i &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

dove le costanti ε_0 , e μ_0 sono dette costante dielettrica e permeabilità magnetica del vuoto e valgono

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 8.85 \text{ pF/m} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} = 1.256 \text{ }\mu\text{H/m} \end{aligned}$$

Tuttavia la forma matematica delle equazioni dipende dalla struttura delle relazioni costitutive e non dai loro dettagli. Pertanto la soluzione delle equazioni del campo elettromagnetico è sostanzialmente la stessa in tutti quei materiali in cui le relazioni costitutive sono della forma

(38), anche se con valori diversi delle costanti. Basterà lasciare le costanti come parametri del problema¹, ovvero sostituire le (38) con

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \varepsilon \mathbf{e} \\ \mathbf{b} &= \mu \mathbf{h} \\ \mathbf{j}_i &= 0\end{aligned}\tag{39}$$

dove le costanti ε , e μ sono dette costante dielettrica e permeabilità magnetica del materiale, diverse da materiale a materiale ma, nell'ambito di un singolo problema sono delle costanti, essendo fissato il materiale.

Può essere utile introdurre le costanti relative

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}\tag{40}$$

e nel seguito utilizzeremo indifferentemente $\varepsilon_r \varepsilon_0$ oppure ε .

Naturalmente i materiali per cui valgono le (39) sono solo una parte dei materiali di interesse, e anche una parte abbastanza piccola. Tuttavia vedremo che, in buona parte dei casi di interesse, molti problemi possono essere risolti utilizzando relazioni costitutive nella forma (39) o in una forma simile.

Questo é in particolare vero per quanto riguarda le relazioni tra \mathbf{j}_i ed \mathbf{e} e tra \mathbf{b} ed \mathbf{h} . Infatti esse sono (nei casi di nostro interesse) quasi sempre del tipo più semplice

$$\mathbf{j}_i = \sigma \mathbf{e} \quad \mathbf{b} = \mu \mathbf{h}\tag{41}$$

dove σ (che può anche essere nulla) e μ dipendono al più da \mathbf{r} . Per frequenze elevate, però, la relazione tra \mathbf{j}_i ed \mathbf{e} diventa dispersiva, ovvero σ dipende anche da ω . Eccezioni notevoli² sono i materiali ferromagnetici. Per tali materiali la relazione tra \mathbf{b} e \mathbf{h} é fortemente non lineare e con isteresi. Ma se il campo variabile é di piccolo valore, la induzione che quest'ultimo crea dipende linearmente da \mathbf{h} (con ottima approssimazione). Il materiale è però anisotropo e fortemente dispersivo nel tempo. In particolare, se il campo \mathbf{h} applicato varia lentamente, il valore di μ può essere anche molto grande (superiore a $10^4 \cdot \mu_0$), mentre se il campo varia rapidamente l'effetto ferromagnetico tende a scomparire.

¹ Si considerano parametri di un problema delle grandezze che possono essere diverse da problema a problema, ma che nella analisi di ciascun caso assumono un valore costante.

² Un'altra eccezione sono le ferriti magnetizzate: in esse la relazione tra \mathbf{b} ed \mathbf{h} è fortemente non lineare ma, se applichiamo un campo magnetico statico che saturi la ferrite e a questo sovrapponiamo un campo variabile \mathbf{h} , la induzione che quest'ultimo crea dipende linearmente da \mathbf{h} (con ottima approssimazione). Il materiale è però anisotropo e dispersivo nel tempo.

8 RAPPRESENTAZIONE DEI SEGNALI SINUSOIDALI

Buona parte dei campi elettromagnetici di interesse hanno una trasformata di Fourier limitata ad un piccolo intervallo attorno a una pulsazione centrale ω_0 , ovvero possono essere considerate come la somma di segnali sinusoidali con frequenze tutte prossime a $f_0 = \omega_0/2\pi$. Se (come avviene molto spesso, e come supporremo sempre nel seguito di questo corso) le proprietà dell'*ambiente* in cui si sviluppa il campo sono costanti in tutto l'intervallo di frequenze del campo, possiamo supporre il campo sinusoidale, e studiarlo come tale.

Un campo che varia sinusoidalmente nel tempo in ogni punto con la stessa pulsazione ω (ovvero con la stessa frequenza $f = \omega/2\pi$) può essere prodotto se tutte le sorgenti dell'onda sono sinusoidali con la stessa pulsazione ω e se il mezzo è lineare e omogeneo nel tempo. Nel seguito quindi faremo sempre queste due ipotesi. Campi di questo tipo possono essere studiati in maniera più semplice.

Si ha infatti che una grandezza sinusoidale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi) \quad (42)$$

può essere rappresentata da un numero complesso ²

$$v(t) \longrightarrow V_M e^{j\varphi} \quad (43)$$

nel senso che

- (a) la corrispondenza è biunivoca: noto il numero complesso A associato alla grandezza $a(t)$, quest'ultima vale

$$a(t) = \text{Re}[Ae^{j\omega t}] \quad (44)$$

- (b) tutte le operazioni lineari (somma, moltiplicazione per un numero reale, derivazione, integrazione) possono essere fatte indifferentemente sulle due rappresentazioni. In particolare

$$\frac{dv}{dt} \longrightarrow j\omega [V_M e^{j\varphi}] \quad (45)$$

Le considerazioni precedenti si applicano anche a grandezze sinusoidali che però variano anche con le coordinate spaziali. In tal caso, in ogni punto la grandezza sarà sinusoidale, e quindi rappresentabile mediante un numero complesso. Tale numero però varia con le coordinate spaziali, e quindi in realtà quella grandezza viene rappresentata mediante una funzione complessa

² Si noti che, al contrario di quanto si conviene nella teoria dei circuiti, e di quanto è previsto dalle normative sulla esposizione ai campi elettromagnetici, il modulo del numero complesso è pari al valore massimo del corrispondente segnale sinusoidale. Le normative invece fanno riferimento al **valore efficace** del campo, nel senso che il numero complesso corrispondente a $v(t)$ data da (42) risulta

$$\left(\frac{V_M}{\sqrt{2}}\right) e^{j\varphi}$$

delle coordinate spaziali. Se consideriamo ad esempio la componente di campo elettrico $e_x(z, t)$, usando la rappresentazione complessa, questo diventa una funzione complessa $E_x(z)$ di z , nel senso che $E_x(z_0)$ è il numero complesso che corrisponde alla funzione sinusoidale del tempo $e_x(z_0, t)$

Per distinguere il caso in cui si utilizza la rappresentazione come funzione di (z, t) da quella in cui si utilizzano i numeri (o le funzioni) complessi corrispondenti, si parla di dominio del tempo (DT) nel primo caso e di dominio della frequenza (DF) nel secondo (si dirà quindi tensione, o campo elettrico nel DT o nel DF , equazioni nel DT o nel DF e così via).

Occorre comunque notare che tutte le operazioni differenziali, e integrali, che coinvolgono le coordinate spaziali, restano inalterate nel DF . Ad esempio, se $E_x(z)$ corrisponde a $e_x(z, t)$, allora

$$\frac{d}{dz} e_x(z, t) \longrightarrow \frac{d}{dz} E_x(z)$$

Oltre alle operazioni lineari, è importante considerare la potenza, che richiede una operazione non-lineare (quadrato di una grandezza sinusoidale o prodotto tra due grandezze sinusoidali). Tali operazioni non sono immediatamente trasferibili sui numeri complessi, ma comunque la rappresentazione nel DF è utilizzabile per ottenere le grandezze energetiche di interesse.

Consideriamo ad esempio il calcolo di una potenza *istantanea* (ma queste considerazioni si applicano a qualunque prodotto di grandezze sinusoidali, e quindi anche a quadrati di queste grandezze, come vedremo nel seguito)

$$p(t) = v(t) i(t) \tag{46}$$

Nel caso sinusoidale tale potenza vale (usando la (43))

$$p(t) = |V| \cos(\omega t + \phi_V) |I| \cos(\omega t + \phi_I) = \frac{1}{2} |V| |I| \cos(\phi_V - \phi_I) + \frac{1}{2} |V| |I| \cos(2\omega t + \phi_V + \phi_I) \tag{47}$$

dove $|V| \exp(j\phi_V)$, $|I| \exp(j\phi_I)$ sono i numeri complessi corrispondenti a $v(t)$, $i(t)$, e sono state usate le formule trigonometriche di Werner³.

Se calcoliamo il valore medio su di un periodo di $p(t)$

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \tag{48}$$

essendo T il periodo dell'onda sinusoidale, si ottiene la potenza *attiva* (o media)

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} |V| |I| \cos(\phi_V - \phi_I) = \text{Re} \left[\frac{1}{2} V I^* \right] \tag{49}$$

Pertanto nel DF non è possibile determinare la potenza istantanea ma è possibile calcolare facilmente la potenza media, ovvero quella che ha effetti energetici.

Benché la conoscenza della potenza attiva sia in genere quella di interesse, può essere utile anche valutare la parte oscillante della potenza istantanea. Infatti, quanto più il suo valore massimo

³ Se viene usata la definizione in termini di valore efficace della nota 2, allora mancherà il fattore $1/2$ nella (47) ed in tutte le espressioni successive riguardanti prodotti (o quadrati) di grandezze sinusoidali.

$$P_{VM} = \frac{1}{2} |V| |I|$$

è grande, fissata la potenza attiva, tanto più grandi saranno le ampiezze di tensione e corrente necessarie a fornire quella data potenza attiva.

Per valutare P_{VM} possiamo notare che

$$P_{VM}^2 = \text{Re} \left[\frac{1}{2} VI^* \right]^2 + \text{Im} \left[\frac{1}{2} VI^* \right]^2$$

e quindi basta considerare insieme la potenza attiva e la cosiddetta *potenza reattiva*, definita da

$$P_R = \text{Im} \left[\frac{1}{2} VI^* \right]$$

Fissata la potenza attiva, al crescere della potenza reattiva aumenta anche la parte oscillante della potenza istantanea P_{VM}

Si definisce allora una *potenza complessa*

$$P = \left[\frac{1}{2} VI^* \right] \quad (50)$$

in modo che la potenza attiva è la parte reale di tale potenza complessa, la potenza reattiva quella immaginaria e

$$P_{VM} = |P|$$

Come detto, le stesse considerazioni si possono applicare anche ad altre grandezze fisiche espresse tramite prodotti di grandezze sinusoidali del tempo.

Consideriamo ad esempio la potenza istantanea dissipata in una resistenza R percorsa da una corrente $i(t)$. Tale potenza vale

$$p_R(t) = R i^2(t) = R \left[i(t) i(t) \right]$$

Se $i(t)$ è sinusoidale il suo valore medio vale, analogamente ad (49),

$$\langle p_R(t) \rangle = R \text{Re} \left[\frac{1}{2} II^* \right] = \frac{1}{2} R |I|^2$$

essendo I il numero complesso corrispondente a $i(t)$.

Un altro esempio, che useremo più avanti, è la potenza istantanea che le correnti impresse forniscono al campo, data dalla (25), che riportiamo.

$$p_C(t) = - \int_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} dV \quad (25)$$

In questo caso è coinvolto un prodotto scalare, ma le considerazioni sono del tutto equivalenti a quelle fatte per il prodotto (46) tra grandezze scalari. Infatti un prodotto scalare come $\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}$ è pari alla somma di tre prodotti tra grandezze scalari: $\mathbf{e} \cdot \mathbf{j} = e_x j_x + e_y j_y + e_z j_z$.

Se \mathbf{e} e \mathbf{j} sono sinusoidali nel tempo, allora la potenza complessa associata a $p_C(t)$ vale

$$P_C = - \int_V \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^* dV \quad (51)$$

che ha la stessa struttura di (50). Ovviamente la parte reale di P_C è al potenza attiva, e quella immaginaria quella reattiva.

Finora abbiamo considerato prodotti che rappresentano potenze. In realtà queste considerazioni valgono anche per altre grandezze (sempre espresse come prodotti) come mostra l'ultimo esempio che riportiamo. Consideriamo l'energia elettrica immagazinata in un condensatore. In corrente continua questa energia vale $w_c = \frac{1}{2} C v(t)^2$ e può essere espressa come prodotto di grandezze variabili nel tempo

$$w_c(t) = \frac{1}{2} C \left[v(t) v(t) \right]$$

Se $v(t)$ è sinusoidale la energia immagazinata è una funzione **periodica** del tempo e, analogamente a quanto visto nel caso della potenza dissipata in una resistenza, il suo valore medio vale

$$\langle w_c(t) \rangle = \frac{1}{2} C \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} V V^* \right] = \frac{1}{4} C |V|^2$$

essendo V il numero complesso corrispondente a $v(t)$.

9 DOMINIO DELLA FREQUENZA

Come abbiamo visto, sostanzialmente tutti i mezzi sono lineari e omogeni nel tempo, ma presentano dispersione. L'utilizzo della rappresentazione complessa, ovvero del Dominio della Frequenza, è quindi possibile, e soprattutto, come vedremo, consente di trattare in maniera sostanzialmente equivalente sia i mezzi istantanei, sia quelli dispersivi.

L'ipotesi di mezzo lineare e omogeneo nel tempo consente di scrivere

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathcal{G}}(\mathbf{r}; t - t') \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}', t') dt' \quad (52)$$

Se il campo elettrico è $\mathbf{e} = \operatorname{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}]$, con $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ complesso

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathcal{G}}(\mathbf{r}; t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} dt' \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathcal{G}}(\mathbf{r}; t - t') e^{j\omega t'} dt' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right] \end{aligned} \quad (53)$$

Nell'integrale in dt' possiamo porre $t' = t - \tau$ ottenendo

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathcal{G}}(\mathbf{r}; \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right] \quad (54)$$

L'integrale in $d\tau$ è la trasformata di Fourier di $\underline{\mathcal{G}}$. Poniamo

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \underline{\mathcal{I}} + \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathcal{G}}(\mathbf{r}; \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (55)$$

Se indichiamo con le lettere maiuscole le grandezze nel DF , allora segue

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (56)$$

Ovviamente, di $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega)$ va utilizzato il valore alla frequenza delle sorgenti.

La matrice complessa $\boldsymbol{\varepsilon}$ generalizza il concetto di costante dielettrica. Essendo una trasformata di Fourier, $\boldsymbol{\varepsilon}$ dipende da ω : tuttavia, per mezzi non dispersivi nel tempo, ne è indipendente. Se il mezzo è omogeneo nello spazio, allora $\boldsymbol{\varepsilon}$ non dipende da \mathbf{r} .

Si può inoltre dimostrare che, in assenza di campi magnetici esterni, la matrice $\boldsymbol{\varepsilon}$ è simmetrica, e ovviamente diventa uno scalare in caso di isotropia.

In altri termini, per un mezzo lineare, isotropo, omogeneo nel tempo e nello spazio, la relazione tra induzione e campo elettrico nel DF è del tipo

$$\mathbf{D}(r) = \varepsilon \mathbf{E}(r) \quad (57)$$

dove ε è un numero **complesso**, dipendente da ω . Poiché formalmente la (57) vale anche per mezzi non dispersivi, e allora ε è reale, useremo nel DF la (57) in tutti i casi.

10 EQUAZIONI DI MAXWELL NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

Se le correnti e i campi sono tutte sinusoidali con la stessa frequenza ω , è possibile scrivere (e risolvere) le equazioni di Maxwell (e la continuità della carica) direttamente nel DF sia a partire dalla forma integrale sia da quella differenziale. Ricordando le relazioni tra DT e DF (vedi App. 1) si trova da (9) e da (5) rispettivamente

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -j\omega \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= -j\omega \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_S [\mathbf{J} + \mathbf{J}_i] \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \rho_{tot} dV \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \end{aligned} \quad (58)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega \mathbf{D} + [\mathbf{J} + \mathbf{J}_i] \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{tot} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (59)$$

in cui si sono indicate con la lettera maiuscola le grandezze vettoriali nel DF .

L'utilizzo del DF consente di trattare in maniera formalmente simile al vuoto non solo i materiali non dispersivi, ma anche altre categorie di materiali, che includono buona parte dei materiali di interesse, ovvero i materiali in cui $\mathbf{j}_i \neq 0$ e quelli *dispersivi*.

Per i materiali **dispersivi**, la relazione tra \mathbf{D} e \mathbf{E} nel DF è

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}$$

dove $\varepsilon(\omega)$ prende ancora il nome di costante dielettrica (complessa). Poiché nel DF la frequenza risulta fissata, la relazione precedente non crea alcun problema nella risoluzione delle equazioni di Maxwell. Va però notato che la funzione $\varepsilon(\omega)$, per il solo fatto di dipendere da ω , deve necessariamente essere **complessa**.

Materiali in cui $\mathbf{j}_i \neq 0$ sono in genere caratterizzabili da una conducibilità σ finita (e, per quanto detto precedentemente, indipendente da ω), e per cui

$$\mathbf{J}_i = \sigma\mathbf{E}$$

È possibile tener conto di tutti questi materiali scrivendo le equazioni di Maxwell nella forma

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}\end{aligned}\tag{60}$$

in cui σ può anche essere nulla e ε può essere reale o complessa.

La seconda equazione può essere formalmente scritta in modo del tutto analogo a quella in assenza di conducibilità ² mettendo in evidenza $j\omega\mathbf{E}$:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J} = j\omega \left[\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right] \mathbf{E} + \mathbf{J}\tag{61}$$

a patto di usare la *costante dielettrica efficace*

$$\varepsilon_e = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega}\tag{62}$$

al posto di ε . Questo non modifica la soluzione formale delle equazioni di Maxwell, ma, come vedremo più avanti, altera il significato fisico di dette equazioni e delle corrispondenti soluzioni.

Si può concludere quindi che in presenza e in assenza di perdite per conduzione, o di dispersione, le equazioni di Maxwell nel DF hanno sempre la forma

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon_e\mathbf{E} + \mathbf{J}\end{aligned}$$

a patto di considerare, se necessario, ε_e (ed eventualmente μ) complesso (e dipendente da ω , che è però un parametro del problema), e di includere la conducibilità nella costante complessa ε_e (considerandola cioè costante dielettrica efficace). In altri termini, tutte le proprietà elettriche del materiale possono essere conglobate in una unica costante complessa (che, in casi particolari, è reale, ovvero con fase nulla) ε_e , che tiene conto sia della risposta dielettrica del materiale, sia di quella conduttiva. Nel seguito, per semplicità, ometteremo il pedice e , e indicheremo con ε direttamente la costante dielettrica efficace.

Notiamo infine che, per esaltare la simmetria delle equazioni di Maxwell, si introduce una *corrente magnetica* impressa \mathbf{M} nella prima equazione:

² Questa equivalenza formale non è invece possibile nel DT .

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{M} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}\end{aligned}\quad (63)$$

11 TEOREMA DI POYNTING

Il campo elettromagnetico esercita delle forze sulle correnti (la Forza di Lorentz), e quindi compie lavoro. Conviene quindi valutare quantitativamente lo scambio di lavoro, o più precisamente di potenza (lavoro nell'unità di tempo) tra il campo e le correnti. Questo scambio di potenza avviene in tutto lo spazio, e quindi vanno opportunamente definite potenza (ed energia).

Consideriamo la quantità

$$\mathbf{s} = \mathbf{e} \times \mathbf{h} \quad (64)$$

detta vettore di Poynting. L'unità di misura di \mathbf{s} risulta essere W/m^2 , e quindi \mathbf{s} appare come una *densità* di potenza. Intuitivamente, quindi, il vettore di Poynting può avere un significato fisico collegato alla potenza. Occorre comunque vedere se tale interpretazione è valida.

Naturalmente, essendo interessati al dominio della frequenza, conviene considerare, al posto di \mathbf{s} , il suo equivalente

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (65)$$

detto vettore di Poynting nel DF . La connessione è la generalizzazione della relazione valida per la potenza in un circuito (vedi par. 8): la parte reale di \mathbf{S} risulta la media in un periodo di \mathbf{s} , nel caso di campi sinusoidali.

Calcoliamo la divergenza di \mathbf{S} , utilizzando le equazioni di Maxwell nella forma

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}\end{aligned}\quad (66)$$

dove $\varepsilon = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2$, separando parte reale ed immaginaria.

Risulta

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{S} &= \frac{1}{2} [\mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^*] = \frac{1}{2} [\mathbf{H}^* \cdot (-j\omega\mu\mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot (j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J})^*] \\ &= \frac{1}{2} [-j\omega\mu|\mathbf{H}|^2 + j\omega\varepsilon^*|\mathbf{E}|^2 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*] = \frac{1}{2} [-j\omega\mu|\mathbf{H}|^2 + j\omega\varepsilon_1|\mathbf{E}|^2 - \omega\varepsilon_2|\mathbf{E}|^2 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*]\end{aligned}\quad (67)$$

Possiamo integrare su di un volume V qualunque, racchiuso da una superficie S , ottenendo

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV = -\frac{1}{2}\omega \int_V \varepsilon_2 |\mathbf{E}|^2 dV - j\omega \int_V \left[\frac{1}{2}\mu |\mathbf{H}|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 |\mathbf{E}|^2 \right] dV + \frac{1}{2} \int_V [-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*] dV \quad (68)$$

L'integrale di $\nabla \cdot \mathbf{S}$ può essere trasformato nel flusso attraverso S , di normale uscente \mathbf{i}_n , col teorema della divergenza, ottenendo infine, con qualche riarrangiamento, il *Teorema di Poynting*:

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{i}_n dS + \frac{1}{2} \omega \int_V \varepsilon_2 |\mathbf{E}|^2 dV = -j 2\omega \int_V \left[\frac{1}{4} \mu |\mathbf{H}|^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_1 |\mathbf{E}|^2 \right] dV + \frac{1}{2} \int_V [-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*] dV \quad (69)$$

Dal punto di vista matematico, la (69) è una relazione valida per qualunque campo elettromagnetico, ovvero per qualunque soluzione delle equazioni di Maxwell. Al contrario delle equazioni di Maxwell, che sono equazioni differenziali, la (69) contiene solo i campi (e non le loro derivate). Matematicamente, una relazione come la (69) prende il nome di *integrale primo*. Il caso più noto riguarda la meccanica: la legge di Newton conduce alle equazioni differenziali del moto, che sono del secondo ordine. Da esse è possibile derivare il *teorema delle forze vive* o, per forze conservative, la conservazione della energia totale. Questi risultati coinvolgono la velocità, e sono quindi relazioni differenziali di ordine più basso delle equazioni di partenza.

Molto più interessante è invece il significato fisico della (69). Per identificarlo, partiamo dall'ultimo termine, che coinvolge le correnti impresse \mathbf{J} . Tali correnti impresse, come visto nel paragrafo sulla forza di Lorentz, forniscono al campo una potenza data dalla (25), che riportiamo

$$p_C(t) = - \int_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} dV \quad (25)$$

A $p_C(t)$ corrisponde, nel DF , una potenza complessa che le correnti impresse forniscono al campo, data dalla (51)

$$P_C = - \int_V \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dV \quad (51)$$

la cui parte reale corrisponde, per campi sinusoidali, al valore medio di $p_C(t)$.

Ovviamente le correnti impresse prelevano la potenza che forniscono al campo dalle sorgenti primarie che le mettono in moto. Se $p_G(t)$ è la potenza che le sorgenti primarie forniscono alle correnti impresse (vedi fig. 1) deve risultare

$$p_G(t) = p_C(t) + \frac{dW_C}{dt} \quad (70)$$

essendo $W_C(t)$ la energia interna delle correnti impresse (tipicamente energia cinetica).

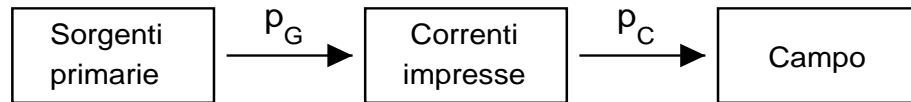


Fig. 1: Flussi di potenza coinvolti

Nel dominio della frequenza la (70) risulta molto più semplice. Infatti, per definizione di media su di un periodo

$$\left\langle \frac{dW_C}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{dW_C}{dt} dt = \frac{1}{T} [W_C(t+T) - W_C(t)] \quad (71)$$

essendo T il periodo e t un istante qualunque. Se tutte le grandezze sono sinusoidali, l'energia W_C è periodica e quindi l'ultimo termine della (71) è nullo. Pertanto il valor medio della derivata di qualunque grandezza periodica è sempre nullo. Ne segue che nel DF

$$P_G = P_C \quad (72)$$

L'integrale finale della (69) è il secondo membro della (51) e possiamo quindi sostituirlo con P_G (vedi (72)). Si ottiene quindi dalla (69), ponendo $\mathbf{S} = \mathbf{S}_r + j\mathbf{S}_i$ e separando parte reale e immaginaria

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{i}_n dS + \frac{1}{2} \omega \int_V \varepsilon_2 |\mathbf{E}|^2 dV &= \quad \quad \quad + \operatorname{Re} [P_G] \\ \oint_S \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{i}_n dS &= - 2\omega \int_V \left[\frac{1}{4} \mu |\mathbf{H}|^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_1 |\mathbf{E}|^2 \right] dV + \operatorname{Im} [P_G] \end{aligned} \quad (73)$$

Esaminiamo per prima la parte reale. Se il materiale è il vuoto, risulterà

$$\oint_S \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{i}_n dS = \operatorname{Re} [P_G] \quad (74)$$

ovvero la potenza che le sorgenti forniscono al campo nel volume V è pari al flusso **uscente** del vettore \mathbf{S}_r . Nel caso del vuoto, non essendoci perdite nel volume V , tutta questa potenza dovrà uscire dalla superficie S per essere dissipata o compiere lavoro all'**esterno** del volume V . Possiamo quindi concludere che

$$\oint_S \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{i}_n dS$$

essendo un flusso di qualcosa che attraversa la superficie S verso l'esterno, può essere interpretata come la potenza che fuoriesce dal volume V .¹

Il flusso di \mathbf{S}_r coinvolge i valori dei campi su S , e quindi è (logicamente) indipendente dal materiale che riempie V . Pertanto questa interpretazione è valida anche se il materiale è diverso dal vuoto. Se $\varepsilon_2 = 0$ la (74) resta valida, e quindi possiamo concludere che anche in questo caso non ci sono perdite in V . Se invece $\varepsilon_2 \neq 0$, il bilancio di potenza coinvolgerà anche il secondo termine della parte reale della (73). La potenza fornita dalle sorgenti primarie solo in parte fluirà all'esterno di V . La restante parte non può che essere dissipata all'interno di V . Il termine di dissipazione è quindi

$$\frac{1}{2} \omega \int_V \varepsilon_2 |\mathbf{E}|^2 dV$$

Ne segue che la presenza di una parte immaginaria della costante dielettrica efficace equivale alla presenza di perdite. Ovviamente ε_2 può derivare sia da fenomeni di *attrito* nella polarizzazione delle molecole, sia da conducibilità (metallica). Possiamo separare i due effetti, ponendo: $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2d} + \sigma/\omega$. Il termine di dissipazione diventa allora:

¹ Da questa interpretazione se ne potrebbe dedurre anche che \mathbf{S} sia la densità di questo flusso di potenza. In realtà questo è vero in molti casi di interesse, ad es. le onde piane, ma non in generale, in quanto \mathbf{S} non è univocamente definito

$$\frac{1}{2} \omega \int_V \varepsilon_2 |\mathbf{E}|^2 dV = \frac{1}{2} \omega \int_V \varepsilon_{2d} |\mathbf{E}|^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma |\mathbf{E}|^2 dV \quad (75)$$

in cui l'ultimo integrale è la potenza attiva dissipata per effetto Joule.

Pertanto la prima delle (73) può essere interpretata come la conservazione della potenza attiva relativamente al campo elettromagnetico.

Abbiamo visto che materiali con $\varepsilon_2 = 0$ sono privi di perdite. Notiamo però esplicitamente che, a causa del principio di *causalità* (la causa **deve** precedere l'effetto) materiali dispersivi (ovvero con ε_d dipendente da ω) devono avere necessariamente $\varepsilon_{2d} \neq 0$, ovvero devono necessariamente avere perdite dielettriche. Se tali perdite sono molto piccole, il materiale viene detto trasparente. Notiamo anche che, talvolta, si usano modelli di materiali dispersivi ma senza perdite. Questo è un utile artificio, in quanto consente di ottenere più semplicemente i valori dei campi. Naturalmente, da tali modelli non possono essere derivate proprietà fisiche generali, in quanto tali modelli violano il principio di causalità.

Per quanto riguarda la seconda delle (73), i termini con P_G e con \mathbf{S}_i sono le potenze reattive associate rispettivamente ai generatori ed al flusso di potenza attraverso S . Ne segue che la potenza reattiva totale che "entra" in V serve a compensare la differenza, moltiplicata per 2ω tra

$$\int_V \frac{1}{4} \mu |\mathbf{H}|^2 dV \quad \text{e} \quad \int_V \frac{1}{4} \varepsilon_1 |\mathbf{E}|^2 dV \quad (76)$$

L'integrando del primo termine è

$$w_M = \frac{1}{4} \mu |\mathbf{H}|^2$$

che corrisponde al valor medio della densità di energia magnetica immagazinata nel materiale (privo di effetti magnetici o, quanto meno, non dispersivo). Pertanto il primo termine è la energia magnetica media immagazinata in V . Analogamente, l'integrando del secondo termine

$$w_E = \frac{1}{4} \varepsilon_1 |\mathbf{E}|^2$$

potrebbe essere considerato il valor medio della densità di energia elettrica immagazinata nel materiale. Tuttavia questo è vero solo per materiali non dispersivi, in cui ε è indipendente da ω . Altrimenti questo termine (che potrebbe essere anche negativo) viene detto densità della pseudo-energia elettrica, e il secondo integrale della (76) è la pseudo-energia elettrica contenuta in V (e diventa l'energia se il materiale è non dispersivo).

Notiamo che il teorema di Poynting nel DF non contiene (al contrario di tutte le equazioni di bilancio della potenza) un termine di energia elettromagnetica **totale** immagazzinata. Ciò perché tale termine dovrebbe essere di variazione di energia immagazzinata, e per segnali sinusoidali, il valor medio delle variazioni è nullo.

Ricapitolando, il teorema di Poynting può essere interpretato come:

$$\oint_S \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{i}_n dS + \frac{\omega}{2} \int_V \varepsilon_{2d} |E|^2 dV + \int_V \frac{\sigma}{2} |E|^2 dV = -\frac{1}{2} \text{Re} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^* dV$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{potenza attiva} \\ \text{uscende da } V \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{potenza dissipata} \\ \text{per attrito in } V \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{potenza dissipata} \\ \text{per effetto Joule} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{potenza attiva} \\ \text{fornita dalle sorgenti} \end{array} \right) \quad (77)$$

$$\oint_S \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{i}_n dS + 2\omega \int_V \left(\frac{1}{4}\mu |H|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_1 |E|^2 \right) dV + = -\frac{1}{2} \text{Im} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^* dV$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{potenza reattiva} \\ \text{uscente da } V \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{differenza tra le pseudo-energie} \\ \text{immagazzinate in } V \end{array} \right) + = \left(\begin{array}{c} \text{potenza reattiva} \\ \text{fornita dalle sorgenti} \end{array} \right) \quad (78)$$

La (77) consente di caratterizzare un materiale ideale, il **conduttore perfetto**, che viene largamente usato in elettromagnetismo. Si definisce **conduttore elettrico perfetto** un materiale in cui la conducibilità $\sigma = \infty$. Poiché la potenza dissipata non può essere infinita in nessuna situazione, la (77) implica che, all'interno di un conduttore elettrico perfetto, il campo elettrico debba essere identicamente nullo: $\mathbf{E} \equiv 0$. Parlando delle equazioni di Maxwell, abbiamo accennato al fatto che queste possono essere poste in una forma (forma differenziale) nella quale il campo magnetico è proporzionale alla variazione spaziale del campo elettrico. All'interno di un conduttore elettrico perfetto, quindi, anche il campo magnetico deve essere identicamente nullo: $\mathbf{H} \equiv 0$.

Se ora consideriamo un punto alla superficie esterna di un conduttore elettrico perfetto, la continuità del campo elettrico tangente mi assicura che in tale punto la *componente tangente* del campo elettrico deve anch'essa essere nulla. Per quanto riguarda la componente tangente del campo magnetico, questa può essere anche diversa da zero, in quanto un conduttore perfetto, per definizione, contiene cariche libere, che possono quindi produrre una corrente superficiale alla superficie del conduttore. Vedremo nel seguito che è esattamente quello che avviene.

A questo punto, per dualità, si definisce anche un **conduttore magnetico perfetto**, caratterizzato da avere, al suo interno, $\mathbf{H} \equiv 0$ e $\mathbf{E} \equiv 0$. Alla superficie del conduttore magnetico perfetto la componente tangente del campo magnetico è nulla (mentre non abbiamo informazioni su quella del campo elettrico).

12 DIPOLO ELEMENTARE

Abbiamo visto finora una serie di proprietà del campo elettromagnetico. Tuttavia non abbiamo ancora affrontato quello che, intuitivamente, è il problema principe dell'elettromagnetismo, ovvero il calcolo del campo prodotto, in tutto lo spazio, da una certa sorgente. Questo problema, in generale, ha solo delle soluzioni formali, non utilizzabili. Tuttavia esistono casi particolari di questo problema relative a sorgenti particolari, o al calcolo del campo solo in certe regioni dello spazio. Una di queste sorgenti particolari è una sorgente concentrata in un solo punto dello spazio (l'equivalente dinamico della carica elettrica puntiforme), detta *dipolo elementare*. In analogia alla elettrostatica, questa è la sorgente più semplice, e quindi di essa vedremo e discuteremo il campo che produce. Quello che troveremo ci consentirà anche di *implementare* una proprietà del campo che deriva dal teorema di Poynting. Infatti il teorema di Poynting ci dice che la potenza fornita dalle correnti al campo in una zona dello spazio (quella in cui sono presenti correnti), può essere utilizzata (e quindi compiere lavoro) anche in punti dello spazio molto distanti. Quello che troveremo è il meccanismo con cui ciò avviene.

Da un punto di vista ingegneristico, con il termine *dipolo elementare* si indica una sorgente di estensione spaziale molto piccola (rispetto a λ), costituita da una densità di corrente orientata in una unica direzione, e costante con essa.

Assumiamo l'asse z lungo la direzione della densità di corrente. Allora anche la corrente I sarà rivolta lungo z , e sarà costante in un tratto Δz pari alla lunghezza del dipolo elementare. La *ampiezza* della sorgente sarà data dal prodotto $I\Delta z$.

Per spiegare l'uso del termine *dipolo* per tale sorgente, notiamo che la corrente \mathbf{J} può essere ottenuta come corrente che scorre all'esterno di un filo, ovvero di un cilindretto di *C.E.P.* lungo Δz e di raggio molto più piccolo della lunghezza, purché alle due estremità del filo siano posti due *serbatoi di cariche*, ad esempio due dischi metallici di raggio piccolo rispetto a λ ma grande rispetto a Δz , che formino le due armature di un condensatore in grado di accumulare cariche. Con tale condensatore, è possibile che la corrente sul filo sia costante, anziché annullarsi alle estremità.

Se confrontiamo le due situazioni di Fig. 1, notiamo che nella figura a sinistra la corrente (che scorre verticalmente sul filo) deve necessariamente annullarsi alle due estremità del filo. Invece la presenza dei due dischi nel dipolo elementare riportato a destra evita che, alle estremità della parte verticale, la corrente debba annullarsi. Poiché il filo è poi molto corto, possiamo applicare i principi di Kirchhoff, concludendo che la corrente è costante su tutto il filo.

Applichiamo l'equazione di continuità alla regione tratteggiata di Fig. 2, che contiene l'armatura superiore del condensatore. Sia Q la carica immagazzinata

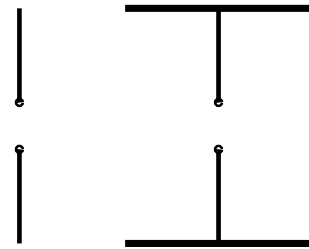


Fig 1: Filo (a sinistra) e dipolo elementare (a destra)

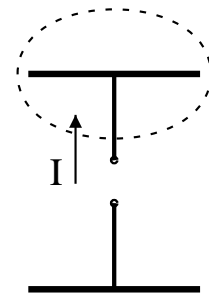


Fig 2: Equazione di continuità

nella armatura, e I la corrente nel dipolo elementare, che entra nella regione tratteggiata. Si ha allora

$$j\omega Q + (-I) = 0$$

da cui segue

$$Q = \frac{I}{j\omega}$$

La carica accumulata nella armatura nel DT vale

$$q(t) = |Q| \cos(\omega t + \phi)$$

essendo ϕ la fase di Q .

Sull'altra armatura la carica sarà pari a $-q(t)$. Si ha quindi un dipolo elettrico *oscillante*, di momento, nel DT , pari a $q(t) \Delta z$, e quindi, nel DF , dato da

$$P = Q \Delta z = \frac{1}{j\omega} I \Delta z \quad (79)$$

Ovviamente le armature devono accumulare questa carica $q(t)$ senza produrre una d.d.p. apprezzabile. Occorre quindi un condensatore di capacità elevata (che non sarebbe ottenibile con un semplice filo, senza armature).

13 CAMPO DI UN DIPOLO ELEMENTARE NEL VUOTO

Il campo di un dipolo elementare, come qualunque altro campo elettromagnetico, si ottiene risolvendo le equazioni di Maxwell (63), per una opportuna corrente impressa \mathbf{J} (nel nostro caso non c'è corrente magnetica impressa), che rappresenti la situazione reale. Poiché un dipolo elementare è una corrente concentrata *idealmente* in un punto, allora la densità di corrente impressa da utilizzare è evidentemente impulsiva (si veda la App. 1) e vale

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = I \Delta z \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_D) \mathbf{i}_D \quad (80)$$

in cui \mathbf{r}_D è il punto in cui si trova il dipolo e \mathbf{i}_D la sua direzione (e verso).

In un sistema di riferimento sferico, il campo nel punto $\mathcal{P} = (r, \theta, \varphi)$, prodotto nel vuoto da un dipolo elementare di ampiezza $I \Delta z$, parallelo ed equiverso all'asse z e posto nell'origine, ovvero la soluzione delle equazioni di Maxwell (63) per una sorgente (80), con $\mathbf{r}_D = 0$ e $\mathbf{i}_D = \mathbf{i}_z$, è¹

¹ Le stesse espressioni in termini di momento di dipolo $P = I \Delta z / j\omega$ si ottengono sostituendo il primo fattore delle espressioni seguenti con

$$j \frac{\zeta I \Delta z}{2\lambda r} = j \frac{\zeta j\omega P}{2\lambda r} = -\frac{\zeta \omega P}{2\lambda r} = -\frac{\beta^2 P}{4\pi \epsilon_0 r}$$

$$j \frac{I \Delta z}{2\lambda r} = j \frac{j\omega P}{2\lambda r} = -\frac{\omega P}{2\lambda r} = -\frac{\beta^2 \omega P}{4\pi \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} r}$$

In questo caso le espressioni sono valide in un mezzo di costanti generiche, a patto di usare i corretti valori di ϵ e di μ , e ovviamente di calcolare β tenendo conto delle costanti del mezzo considerato.

$$\begin{aligned}
E_r &= j \frac{\zeta I \Delta z}{2\lambda r} \left[\frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right] e^{-j\beta r} 2 \cos \theta \\
E_\theta &= j \frac{\zeta I \Delta z}{2\lambda r} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right] e^{-j\beta r} \sin \theta \\
H_\varphi &= j \frac{I \Delta z}{2\lambda r} \left[1 + \frac{1}{j\beta r} \right] e^{-j\beta r} \sin \theta
\end{aligned} \tag{81}$$

in cui β , λ e ζ sono parametri caratteristici del mezzo, definiti da

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{e} \quad \zeta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \tag{82}$$

che si misurano in m^{-1} , m e Ω rispettivamente, e di cui vedremo il significato più avanti.

Queste espressioni valgono in tutto lo spazio (fatta eccezione per il punto in cui si trova il dipolo), ma sono abbastanza complesse, soprattutto da interpretare. Tuttavia tali espressioni si possono semplificare nei due casi di punto campo \mathcal{P} lontano dal dipolo, $\beta r \gg 1$ o vicino al dipolo $\beta r \ll 1$. Ovviamente, nei punti a distanza intermedia tra queste, va necessariamente usata l'espressione completa (81).

Nel caso di campo vicino $\beta r \ll 1$, nella parentesi quadra possiamo trascurare tutti i termini rispetto all'ultimo, e porre anche $e^{-j\beta r} \simeq 1$.

Le (81) diventano allora

$$\begin{aligned}
E_r &= j \frac{\zeta I \Delta z}{2\lambda r} \left(\frac{1}{j\beta r} \right)^2 2 \cos \theta \\
E_\theta &= j \frac{\zeta I \Delta z}{2\lambda r} \left(\frac{1}{j\beta r} \right)^2 \sin \theta \\
H_\varphi &= j \frac{I \Delta z}{2\lambda r} \left(\frac{1}{j\beta r} \right) \sin \theta
\end{aligned} \tag{83}$$

Si vede immediatamente che, nelle (83), il campo \mathbf{E} ed il campo \mathbf{H} vanno all'infinito (per $r \rightarrow 0$), ma in modo diverso, e in particolare il campo magnetico è un infinito di ordine inferiore. Tuttavia, non è possibile confrontare direttamente i due campi, che hanno unità di misura diverse. Possiamo però confrontare le densità di energia (ovvero gli integrandi della (76)), assumendo che il campo è essenzialmente elettrico (o magnetico) se la densità di energia elettrica (oppure quella magnetica) è molto più grande dell'altra. Essendo

$$\sqrt{\frac{w_E}{w_M}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{\mu_0 |\mathbf{H}|^2}} = \frac{1}{\zeta} \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|}$$

le grandezze da confrontare sono $|\mathbf{E}|$ e $\zeta |\mathbf{H}|$. Per il campo vicino di un dipolo elementare si ha quindi

$$\frac{|\mathbf{E}|}{\zeta |\mathbf{H}|} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta}}{\sin \theta} \frac{1}{\beta r} = \frac{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}}{\sin \theta} \frac{1}{\beta r}$$

Il primo fattore è maggiore di 1, ed il secondo è molto maggiore di 1. Ne segue che vicino a un dipolo

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\zeta\mathbf{H}|} \gg 1 \quad \Longrightarrow \quad |\mathbf{E}| \gg |\zeta\mathbf{H}|$$

e quindi il campo è essenzialmente elettrico (il campo magnetico è, entro certi limiti, trascurabile).

Se esprimiamo il campo elettrico della (83) in termini di momento di dipolo $P = I\Delta z/j\omega$, si ottiene

$$\begin{aligned} E_r &= j \frac{\zeta j\omega P}{2\lambda r} \frac{-1}{(\beta r)^2} 2 \cos \theta = \frac{1}{2r^3} \frac{1}{\lambda\beta} \frac{\zeta\omega}{\beta} P 2 \cos \theta = \frac{1}{4\pi r^3} \frac{1}{\varepsilon_0} P 2 \cos \theta \\ E_\theta &= j \frac{\zeta j\omega P}{2\lambda r} \frac{-1}{(\beta r)^2} \sin \theta = \frac{1}{2r^3} \frac{1}{\lambda\beta} \frac{\zeta\omega}{\beta} P \sin \theta = \frac{1}{4\pi r^3} \frac{1}{\varepsilon_0} P \sin \theta \end{aligned} \quad (84)$$

essendo $\lambda\beta = 2\pi$ e

$$\zeta \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

Le espressioni (84) del campo di un dipolo elementare oscillante a frequenza ω sono analoghe² a quelle del campo elettrostatico di un dipolo costante. Va però tenuto presente che queste ultime sono valide a qualunque distanza, mentre le (84) esprimono il campo del dipolo oscillante solo se $\beta r \ll 1$ ovvero se $r \ll \lambda$. Questo conferma che, per regioni di dimensioni piccole rispetto a λ , è possibile usare le leggi dei campi statici, e quindi i principi di Kirchhoff.

14 CAMPO LONTANO

Esaminiamo ora cosa succede a grande distanza dal dipolo.

Se $\beta r \gg 1$ si possono trascurare, nelle parentesi quadre della (81), tutti i termini rispetto a 1, e quindi anche E_r rispetto a E_θ .

In tal caso il campo diventa

$$\begin{aligned} E_\theta &= j \frac{\zeta I\Delta z}{2\lambda r} e^{-j\beta r} \sin \theta \\ H_\varphi &= j \frac{I\Delta z}{2\lambda r} e^{-j\beta r} \sin \theta = \frac{1}{\zeta} E_\theta \end{aligned} \quad (85)$$

ovvero i campi variano con \mathbf{r} allo stesso modo, e sono entrambi ortogonali alla direzione radiale (campi trasversi). La costante ζ , detta *impedenza caratteristica* del vuoto, è quindi il rapporto tra le ampiezze di campo elettrico e magnetico a grande distanza dal dipolo.

² Naturalmente le (84) esprimono il campo, oscillante a frequenza ω , di un dipolo oscillante $p(t) = P_0 \cos \omega t$, e non quelle di un dipolo costante. Tuttavia, se consideriamo il campo (84) nel DT otteniamo

$$\mathbf{E} = \frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3} [2 \cos \theta \mathbf{i}_r + \sin \theta \mathbf{i}_\theta] \cos \omega t$$

Quest'ultima espressione è valida sia per $\omega = 0$ qualunque sia r , sia per $\omega \neq 0$, e $r \ll \lambda$.

In termini vettoriali, dalla (85) segue

$$\mathbf{E} = \zeta \mathbf{H} \times \mathbf{i}_r \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\zeta} \mathbf{i}_r \times \mathbf{E} \quad (86)$$

in quanto sia \mathbf{E} sia \mathbf{H} sono ortogonali a \mathbf{i}_r . La (86) consente di calcolare in maniera molto semplice anche il vettore di Poynting in campo lontano. Risulta infatti

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2\zeta} \mathbf{E} \times [\mathbf{i}_r \times \mathbf{E}]^* = \frac{1}{2\zeta} [|\mathbf{E}|^2 \mathbf{i}_r - (\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}^*] = \frac{1}{2\zeta} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{i}_r \quad (87)$$

Segue dalla (87) che il vettore di Poynting è un infinitesimo di ordine 2 all'infinito.

Poiché vale la sovrapposizione degli effetti, anche il campo di più dipoli, ovvero il campo di una qualunque distribuzione di correnti¹, purché di estensione spaziale limitata, ha, per $\beta r \rightarrow \infty$, le stesse proprietà del campo di un dipolo. In particolare devono valere

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r|\mathbf{E}| < \infty \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r|\mathbf{H}| < \infty \quad (88)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r(\mathbf{E} - \zeta \mathbf{H} \times \mathbf{i}_r) = 0$$

Le (88), e in particolare l'ultima di queste, prendono il nome di condizioni di Sommerfeld, o condizioni di radiazione all'infinito. Il significato fisico di queste condizioni è che, all'infinito, sia \mathbf{E} , sia \mathbf{H} devono essere infinitesime almeno del primo ordine, mentre la differenza $\mathbf{E} - \zeta \mathbf{H} \times \mathbf{i}_r$ deve esserlo di ordine superiore al primo².

Conseguenza della condizione di Sommerfeld è che la espressione (87) del vettore di Poynting vale, all'infinito, per qualunque distribuzione di sorgenti (purché spazialmente limitata), evidentemente a meno di infinitesimi di ordine 3. Vedremo più avanti che queste espressioni valgono, in maniera approssimata ma sufficientemente accurata, anche al finito, purché abbastanza lontano dalle sorgenti.

15 PROPAGAZIONE

La presenza del fattore $e^{-j\beta r}$ ha conseguenze molto importanti sul carattere della soluzione (85) a grande distanza. A questo andamento nel DF corrisponde infatti, nel DT

$$\text{Re} [e^{-j\beta r} e^{j\omega t}] = \cos(\beta r - \omega t) = \cos \left[\beta \left(r - \frac{\omega}{\beta} t \right) \right]$$

in cui la costante ω/β è dimensionalmente una velocità, e verrà indicata nel seguito con

¹ Una qualunque distribuzione di correnti può sempre essere decomposta nella sovrapposizione di dipoli elementari

² In realtà andrebbe anche aggiunto che le componenti radiali dei campi E_r ed H_r devono essere di ordine superiore al primo.

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (89)$$

e risulta indipendente dalla frequenza.

Il campo elettrico al variare di r e t sar  quindi (a meno di una costante di proporzionalit )

$$e(r, t) = \frac{1}{r} f(r - v_p t) \quad \text{con} \quad f(r - v_p t) = \cos [\beta (r - v_p t)] \quad (90)$$

Per determinare il significato fisico della soluzione (90), cominciamo a notare che, essendo in campo lontano, se esaminiamo il campo (90) in un intervallo limitato dell'asse r , la dipendenza da r^{-1}   sostanzialmente ininfluenza. Resta quindi da considerare solo il fattore $f(r - v_p t)$.

Consideriamo la *fotografia* del campo elettrico a due istanti diversi di tempo, t_1 e t_2 , otteniamo rispettivamente $f(r - v_p t_1)$ e $f(r - v_p t_2)$. In altri termini i due andamenti di campo sono uguali come forma ma si trovano in punti diversi dell'asse r . Infatti, da (90) segue che $f(X) = \cos \beta X$ ha un massimo in 0. Allora il campo all'istante t_1 ha un massimo per $r - v_p t_1 = 0$ ovvero per $r = v_p t_1$, mentre il campo all'istante t_2 ha un massimo per $r - v_p t_2 = 0$ ovvero per $r = v_p t_2$ (vedi Fig. 1).

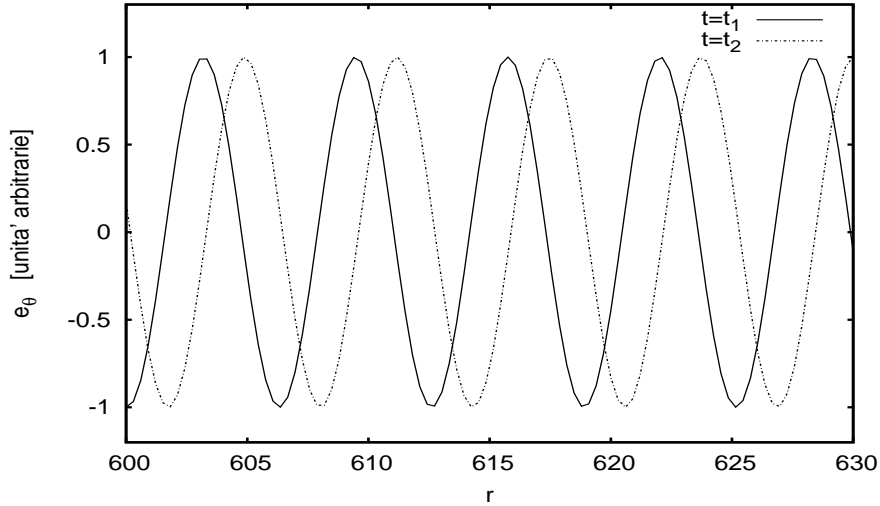


Fig. 1: Andamento del campo elettrico nello spazio negli istanti t_1 e t_2 (con $t_2 > t_1$).

La funzione $f(r - v_p t)$ rappresenta dunque una *onda* ovvero una *configurazione di campo* che si muove nello spazio con *velocit  finita misurabile*, mantenendosi riconoscibile. Nel nostro caso, anzi, la forma si mantiene inalterata, e solo la ampiezza, se includiamo il fattore r^{-1} , varia. Il moto di un'onda   detto *propagazione*.

La velocit  di *propagazione* dell'onda descritta da $f(r - v_p t)$ si ottiene immediatamente come rapporto tra lo spazio percorso nel moto e il tempo impiegato percorrerlo, e vale

$$\frac{v_p t_2 - v_p t_1}{t_2 - t_1} = v_p \quad (91)$$

L'onda descritta da $f(r - v_p t)$ è pertanto un'onda che si propaga nel verso *positivo* dell'asse r con velocità pari a v_p . In particolare la velocità di propagazione delle onde nel vuoto (89) è numericamente pari alla velocità della luce nel vuoto.

Possiamo quindi concludere che il campo lontano di un dipolo elementare si propaga, e si propaga in direzione radiale.

Esaminando la Fig. 1, si vede poi che il campo a grande distanza è sostanzialmente periodico rispetto a r . L'analogo spaziale della pulsazione risulta essere la costante β introdotta nella (82) e che prende il nome di *costante di propagazione*. Il periodo spaziale, sempre dalla (82), risulta quindi essere la costante λ , che viene detta *lunghezza d'onda*.

Notiamo anche esplicitamente che l'andamento sinusoidale con r descritto nella Fig. 1, è una diretta conseguenza di aver scelto una sorgente sinusoidale nel tempo. L'andamento $f(r - v_p t)$, tipico di una onda che si propaga, mostra infatti che l'andamento nel tempo a r fissato è analogo all'andamento spaziale a t fissato. Questa analogia vale anche per il caso di sorgenti non sinusoidali.

Cominciamo a notare che se la corrente del dipolo $i(t)$ non è sinusoidale, può sempre essere espressa in termini di trasformata di Fourier $I(\omega)$

$$i(t) = \int I(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

La $I(\omega)$ è la trasformata di un segnale reale, e quindi soddisfa a $I(-\omega) = I^*(\omega)$. Ne segue che

$$i(t) = \int_{-\infty}^0 I(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} + \int_0^{\infty} I(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} I(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right]$$

in quanto i due integrali sono uno il coniugato dell'altro. Pertanto $i(t)$ può sempre essere vista come la combinazione lineare di infiniti segnali sinusoidali, e il campo prodotto da questa corrente può essere calcolato come combinazione lineare (rispetto a ω) di campi di sorgenti sinusoidali.

In particolare il campo lontano si ottiene come combinazione lineare delle espressioni (85). Riscriviamo il campo elettrico lontano di una corrente sinusoidale (85) come

$$E_\theta = j \frac{\zeta I \Delta z \omega}{4\pi v_p r} \exp\left(-j \frac{\omega}{v_p} r\right) \sin \theta$$

per cui il campo dovuto a $i(t)$ vale

$$\begin{aligned} e_\theta(t) &= 2 \frac{\zeta \Delta z}{4\pi v_p r} \sin \theta \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} j\omega I(\omega) \exp\left(-j \frac{\omega}{v_p} r\right) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right] \\ &= 2 \frac{\zeta \Delta z}{4\pi v_p r} \sin \theta \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} j\omega I(\omega) \exp\left[-j \frac{\omega}{v_p} (r - v_p t)\right] \frac{d\omega}{2\pi} \right\} \end{aligned} \quad (92)$$

Il campo nella (92) può quindi ancora essere espresso come

$$e_\theta(t) = \frac{1}{r} f(r - v_p t)$$

Si ha allora un andamento come, ad esempio, quello di Fig. 2, da cui è ancora più evidente la propagazione del campo.

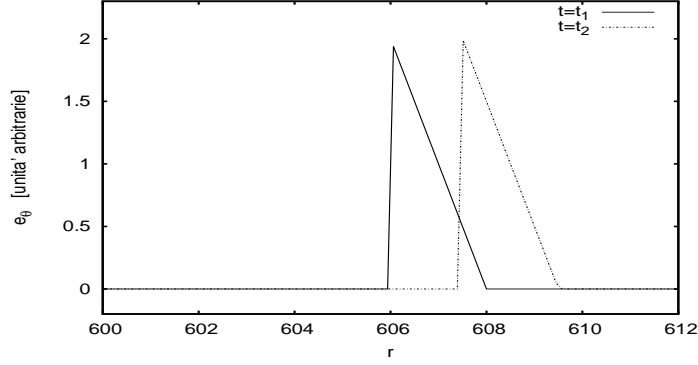


Fig. 2: Andamento del campo elettrico nello spazio negli istanti t_1 e t_2 (con $t_2 > t_1$).

16 DIPOLO CORTO

Un dipolo elementare è di difficile realizzazione, a causa delle capacità terminali.

Dato che l'andamento del campo di un dipolo dipende essenzialmente dal fatto che la corrente è concentrata in una regione molto piccola rispetto a λ (e dalla direzione della corrente stessa), conviene quindi esaminare se una sorgente costituita solo dai due fili verticali (quindi senza condensatore) sia utilizzabile come dipolo, ovviamente nella ipotesi che la sua lunghezza 2ℓ sia molto piccola rispetto a λ .

La struttura che consideriamo è riportata in Fig. 1.

Sappiamo che in regioni piccole rispetto a λ possiamo utilizzare i principi di Kirchhoff. Nel nostro caso questi ci dicono che $I(\ell) = I(0)$, e poiché $I(\ell)$ è necessariamente nulla, allora anche la corrente sulla antenna è nulla. Quindi, apparentemente, una tale sorgente non funziona.

In realtà, i principi di Kirchhoff sono una ottima approssimazione, ma sempre una approssimazione. E una approssimazione non è utilizzabile quando il risultato approssimato è nullo.

Pertanto, essendo $I(0) = I_A \neq 0$, ci sarà una corrente non nulla sulla antenna. Essendo comunque l'antenna molto piccola tale corrente (non potendo essere costante) varierà linearmente con z :

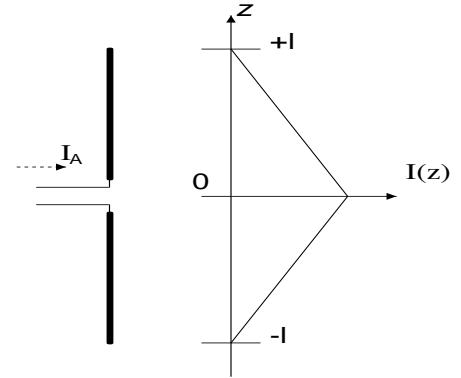


Fig 1: Geometria e corrente di un dipolo corto

$$I(z) = I_A \left(1 - \frac{|z|}{\ell}\right) \quad (93)$$

Conseguenza di questo fatto è che vi sarà una carica accumulata lungo l'antenna. Se consideriamo un tratto Δz posto alla ascissa z , su di esso vi sarà una carica $q(z) \Delta z$. Per calcolarla consideriamo l'equazione di continuità della carica:

$$\text{corrente uscente} = -\frac{d}{dt} \text{carica contenuta}$$

che nel DF , e nel nostro caso, diventa

$$I(z + \Delta z) + [-I(z)] = -j\omega q(z) \Delta z \quad (94)$$

Risolvendo per la carica, e usando la (93), si ha

$$q(z) = \frac{1}{\Delta z} \frac{1}{-j\omega} \frac{dI(z)}{dz} \Delta z = \frac{1}{-j\omega} \frac{-I_A}{\ell} \quad (95)$$

La carica $q(z)$ e quella $q(-z)$ costituiscono un dipolo di momento $2zq(z)$. Il momento totale di dipolo sarà quindi

$$P_{tot} = \int_0^\ell 2zq(z) dz = \frac{I_A}{j\omega\ell} \int_0^\ell 2z dz = \frac{I_A}{j\omega\ell} 2 \frac{\ell^2}{2} = \frac{I_A \ell}{j\omega} \quad (96)$$

L'espressione di P_{tot} è simile a quella (79) del momento di dipolo di un dipolo elementare, ma il fattore geometrico coinvolto è la **metà** della lunghezza totale della sorgente. Ciò in quanto la carica, per un dipolo corto, è distribuita lungo tutta la sorgente, e non concentrata alle estremità.

Il campo di un dipolo corto è quindi lo stesso di un dipolo elementare (se la corrente ha la stessa direzione), a patto di usare come ampiezza della sorgente $I_A \ell$.

17 POTENZA IRRADIATA DA UN DIPOLO

La potenza attiva irradiata da un dipolo (corto o elementare) può essere calcolata come flusso della parte reale del vettore di Poynting su una superficie qualunque che racchiude il dipolo¹. Conviene allora utilizzare una sfera di raggio R_0 per semplicità.

Il vettore di Poynting di un dipolo ha due componenti:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2} [E_r \mathbf{i}_r + E_\vartheta \mathbf{i}_\vartheta] \times H_\varphi^* \mathbf{i}_\varphi = \frac{1}{2} E_r H_\varphi^* (-\mathbf{i}_\vartheta) + \frac{1}{2} E_\vartheta H_\varphi^* \mathbf{i}_r \quad (97)$$

Sostituendo le espressioni dei campi si ha, per le due componenti di \mathbf{S}

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \mathbf{i}_r &= \frac{1}{2} E_\vartheta H_\varphi^* = \frac{1}{2} \frac{\zeta |I|^2 h^2}{4\lambda^2 R_0^2} \left[1 + \frac{1}{j\beta R_0} + \left(\frac{1}{j\beta R_0} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{1}{j\beta R_0} \right]^* \sin^2 \theta \\ \mathbf{S} \cdot \mathbf{i}_\vartheta &= -\frac{1}{2} E_r H_\varphi^* = -\frac{1}{2} \frac{\zeta |I|^2 h^2}{4\lambda^2 R_0^2} \left[\frac{1}{j\beta R_0} + \left(\frac{1}{j\beta R_0} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{1}{j\beta R_0} \right]^* 2 \cos \theta \sin \theta \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\zeta |I|^2 h^2}{4\lambda^2 R_0^2} \frac{1}{j\beta R_0} \left[1 + \frac{1}{j\beta R_0} \right] \left[1 + \frac{1}{j\beta R_0} \right]^* 2 \cos \theta \sin \theta \\ &= j \frac{1}{2} \frac{\zeta |I|^2 h^2}{4\lambda^2 R_0^2} \frac{1}{\beta R_0} \left[1 + \frac{1}{\beta^2 R_0^2} \right] \end{aligned} \quad (98)$$

¹ La superficie può essere qualunque in quanto non vi è nè dissipazione, nè sorgenti all'esterno del dipolo

dove si è indicato con h la lunghezza del dipolo elementare oppure la semilunghezza nel caso di un dipolo corto.

La prima cosa che si nota é che S_θ è puramente immaginaria, quindi lo squilibrio tra le energie non è uniforme rispetto a θ .

Molto più interessante è invece la componente radiale. Il prodotto dei due termini in parentesi quadra di \mathbf{S}_r vale

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{1}{j\beta R_0} + \left(\frac{1}{j\beta R_0} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{1}{j\beta R_0} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{j\beta R_0} + \left(\frac{1}{j\beta R_0} \right)^2 - \frac{1}{j\beta R_0} - \left(\frac{1}{j\beta R_0} \right)^2 - \left(\frac{1}{j\beta R_0} \right)^3 \quad (99) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{j\beta R_0} \right)^3 = 1 - j \left(\frac{1}{\beta R_0} \right)^3 \end{aligned}$$

La parte reale e quella immaginaria di $\mathbf{S} \cdot \mathbf{i}_r$ valgono pertanto

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{i}_r &= \frac{1}{2} \frac{\zeta |I|^2 h^2}{4\lambda^2 R_0^2} \sin^2 \theta \mathbf{i}_r \\ \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{i}_r &= -\frac{1}{2} \frac{\zeta |I|^2 h^2}{4\lambda^2 R_0^2} \sin^2 \theta \mathbf{i}_r \left(\frac{1}{\beta R_0} \right)^3 = -\frac{1}{2} \frac{\zeta |I|^2 h^2}{4(2\pi)^2 \beta} \frac{1}{R_0^5} \sin^2 \theta \mathbf{i}_r \end{aligned} \quad (100)$$

Risulta $dS = R_0^2 d\Omega = R_0^2 \sin \theta d\theta d\phi$ e quindi la potenza irradiata vale

$$\begin{aligned} P_i &= \oint \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{i}_r dS = \oint \frac{1}{2} \frac{\zeta |I|^2 h^2}{4\lambda^2 R_0^2} \sin^2 \theta R_0^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{2} \frac{\zeta |I|^2 h^2}{4\lambda^2} \oint \sin^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1}{2} \frac{\zeta |I|^2 h^2}{4\lambda^2} \frac{8\pi}{3} \end{aligned} \quad (101)$$

Possiamo esprimere la potenza irradiata come

$$P_i = \frac{1}{2} \frac{2\pi\zeta}{3} |I|^2 \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 \quad (102)$$

da cui notiamo che la potenza, oltre ad essere proporzionale a $|I|^2$, aumenta al crescere di $\frac{h}{\lambda}$.

Invertendo la (102) si trova anche

$$|I|h = \sqrt{\frac{3}{\pi\zeta}} \lambda \sqrt{P} \simeq \frac{1}{20} \lambda \sqrt{P}$$

La potenza irradiata e il modulo quadro del campo sono entrambi proporzionali a $|I|^2 h^2$. Possiamo allora esprimere il modulo quadro del campo in funzione della potenza irradiata²

² Come vedremo, esistono molte sorgenti piccole rispetto alla lunghezza d'onda che producono un campo che é con ottima approssimazione quello di un dipolo elementare. Ad esempio, molti apparati industriali producono campo (indesiderato) a frequenze relativamente basse, con lunghezze d'onda dell'ordine di decine o centinaia di metri e quindi maggiori delle dimensioni dell'apparecchiatura. Questi campi possono essere approssimati con quello di un dipolo elementare o corto (o con la somma di più campi di dipolo elementare), ma naturalmente il

invertendo la (102)

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}|^2 &= \left[\frac{\zeta |I|h}{2\lambda r} \right]^2 \left[\left| \frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right|^2 4 \cos^2 \theta + \left| 1 + \frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right|^2 \sin^2 \theta \right] \\
&= \left[\frac{3\zeta P_i}{4\pi} \right] \frac{1}{r^2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{\beta r} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta r} \right)^4 \right] 4 \cos^2 \theta + \left[\left(\frac{1}{\beta r} \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\beta^2 r^2} \right)^2 \right] \sin^2 \theta \right\}
\end{aligned} \tag{103}$$

Da un punto di vista pratico sembrerebbe che, per irradiare una certa potenza, possa scegliere in modo arbitrario $|I|$ e h , col vincolo che il prodotto resti costante. In realtà le antenne, specie a bassa frequenza, sono realizzate con materiali non ideali: si ha quindi una dissipazione per effetto Joule, proporzionale a $|I|^2$. L'efficienza di radiazione η , definita da

$$\eta = \frac{\text{Potenza irradiata}}{\text{Potenza irradiata} + \text{Potenza dissipata}}$$

risulta quindi tanto maggiore quanto più piccola è la corrente. Questo è uno dei motivi che spinge a scegliere il valore di h il più grande possibile, compatibilmente con i vincoli realizzativi.

In realtà occorrerebbe anche essere certi che l'antenna sia ancora un dipolo elementare o corto, il che richiede $h \ll \lambda$, ma, almeno qualitativamente, la potenza irradiata aumenta (fissata $|I|$) con le dimensioni anche per antenne differenti.

Possiamo anche esprimere la potenza irradiata in termini di momento di dipolo P . Essendo $j\omega P = Ih$, si trova sostituendo

$$P_i = \frac{1}{2} \frac{2\pi\zeta}{3} \omega^2 |P|^2 \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \tag{104}$$

Ora $\frac{1}{\lambda} = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi c}$, essendo c la velocità della luce nel vuoto. Sostituendo

$$P_i = \frac{1}{2} \frac{\zeta}{6\pi c^2} \omega^4 |P|^2 \tag{105}$$

La dipendenza della potenza irradiata da ω^4 , fissato $|P|$, è, ad esempio, responsabile del colore azzurro del cielo. La luce solare polarizza le molecole d'aria, trasformandole in dipoli elettrici che reirradiano. La potenza reirradiata nel blu, $\lambda = 400 \text{ nm}$, è 16 volte più grande di quella reirradiata nel rosso, $\lambda = 800 \text{ nm}$, e quindi nella luce diffusa verso la terra è presente solo la prima.

parametro misurabile in questi casi è la potenza irradiata, e non la corrente di alimentazione, non essendo questo un'antenna.

18 ANDAMENTO DEL CAMPO DI UN DIPOLO CORTO

Le normative italiane e internazionali impongono dei limiti al campo diffuso dell'ambiente, a protezione della salute. Questi limiti riguardano tutte le grandezze di interesse, ovvero $|\mathbf{E}|$, $|\mathbf{H}|$ e $|\mathbf{S}|$. Questi limiti sono da verificare normalmente in campo vicino o intermedio (in campo lontano sono in genere largamente verificati), e poiché molte sorgenti, specie a bassa frequenza, sono modellabili come un dipolo (elementare o corto), allora conviene vedere più da vicino l'andamento del campo vicino di un dipolo¹. Ci limitiamo a quello elettrico, che è il più critico sotto l'aspetto della normativa.

I campi del dipolo sono dati dalle equazioni (81) in funzione della corrente o (103) in funzione della potenza irradiata. Conviene però (anche perché siamo interessati solo a $|\mathbf{E}|$), utilizzare quest'ultima (un parametro usabile anche per dipoli elementari e, soprattutto, per sorgenti approssimabili con dipoli). Riscriviamo la (103) nella forma

$$|\mathbf{E}|^2 = \left[\frac{3\zeta\beta^2 P_i}{4\pi} \right] \left\{ A(r) \cos^2 \theta + B(r) \sin^2 \theta \right\} \quad (106)$$

essendo

$$A(r) = 4 \frac{1}{\beta^2 r^2} \left[\left(\frac{1}{\beta r} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta r} \right)^4 \right]$$

$$B(r) = \frac{1}{\beta^2 r^2} \left[\left(\frac{1}{\beta r} \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\beta^2 r^2} \right)^2 \right]$$

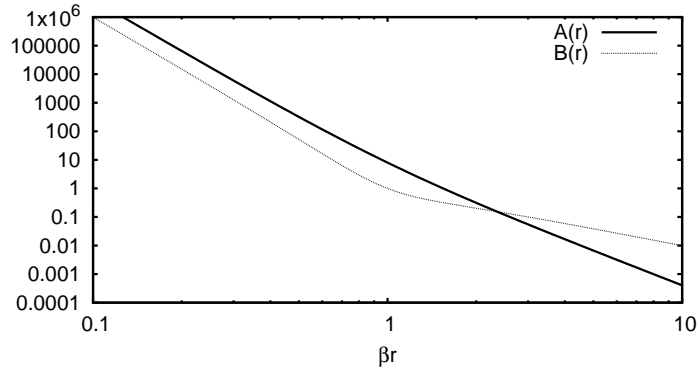


Fig. 1: Andamenti di $A(r)$ e $B(r)$.

Dall'andamento di queste funzioni, riportato in Fig. 1, si vede che per r piccolo risulta $A(r) > B(r)$, mentre per r grande risulta $B(r) > A(r)$. Le due funzioni sono uguali per un valore r_X dato da

$$A(r_X) = B(r_X) \implies 4 \left[\left(\frac{1}{\beta r_X} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta r_X} \right)^4 \right] = \left(\frac{1}{\beta r_X} \right)^2 + 1 - 2 \left(\frac{1}{\beta r_X} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta r_X} \right)^4$$

¹ In realtà vi sono anche molte sorgenti modellabili come un dipolo *magnetico*, ma vedremo più avanti che gli andamenti del campo di quest'ultimo hanno lo stesso andamento.

la cui soluzione è

$$\beta r_X = 2.357$$

Fissata la direzione θ , si vede facilmente dalla Fig. 1 che $|\mathbf{E}|^2$ è una funzione decrescente di r . La dipendenza da θ , fissato r , è invece più complessa, e possiamo limitarci a valutarla per $\theta \in [0, \pi/2]$ per la simmetria del campo. La derivata della (106) rispetto a θ vale (a parte una costante)

$$\frac{\partial}{\partial \theta} |\mathbf{E}|^2 = A(r)[-2 \sin \theta \cos \theta] + B(r)[2 \sin \theta \cos \theta] = [B(r) - A(r)] \sin 2\theta \quad (107)$$

Questa derivata si annulla solo in 0 e $\pi/2$, e (essendo $\sin 2\theta \geq 0$) è positiva per $B(r) > A(r)$ e negativa per $A(r) > B(r)$ (mentre per $r = r_X$ il campo è costante con θ).

Pertanto, per $r < r_X$, il massimo si ha in $\theta = 0$ e vale

$$\max_{\theta} |\mathbf{E}|^2 = \left[\frac{3\zeta \beta^2 P_i}{4\pi} \right] A(r) \quad r < r_X$$

mentre per $r > r_X$, il massimo si ha in $\theta = \pi/2$ e vale

$$\max_{\theta} |\mathbf{E}|^2 = \left[\frac{3\zeta \beta^2 P_i}{4\pi} \right] B(r) \quad r > r_X$$

In particolare, se $\beta r \ll 1$ allora

$$A(r) \simeq \frac{4}{\beta^6 r^6} \quad \text{e} \quad \max_{\theta} |\mathbf{E}|^2 = \left[\frac{3\zeta P_i}{4\pi} \right] \frac{4}{\beta^4} \frac{1}{r^6} \quad \beta r \ll 1$$

mentre se $\beta r \gg 1$ allora

$$B(r) \simeq \frac{1}{\beta^2 r^2} \quad \text{e} \quad \max_{\theta} |\mathbf{E}|^2 = \left[\frac{3\zeta P_i}{4\pi} \right] \frac{1}{r^2} \quad \beta r \gg 1$$

19 MEZZI DISPERSIVI – MODELLO DI DEBYE

Il vuoto non ha costituenti elementari, e quindi la risposta al campo applicato è istantanea (vedi (38)). Abbiamo anche detto che molti materiali hanno relazioni costitutive analoghe (39), ovvero istantanee. Questo però è possibile solo se i costituenti elementari sono privi di inerzia. Evidentemente nessun oggetto fisico è privo di inerzia, per cui le (39) possono solo essere delle approssimazioni, di cui va valutata precisione e limiti di applicabilità.

Occorre quindi esaminare più in dettaglio l'effetto dell'inerzia dei costituenti microscopici sulle relazioni costitutive. Al solito consideriamo il caso dei materiali dielettrici, in quanto le altre relazioni costitutive hanno comportamenti matematicamente analoghi.

Sappiamo che un dielettrico risponde al campo $\mathbf{e}(t)$ applicato polarizzandosi, ovvero orientando (o deformando) i dipoli che lo costituiscono. Se il campo $\mathbf{e}(t)$ è costante o varia lentamente, tali dipoli riescono a seguire senza ritardo la variazione del campo elettrico, e allora $\mathbf{p}(t)$ riesce a seguire istantaneamente il campo $\mathbf{e}(t)$ che la produce. Si ha quindi

$$\mathbf{p}(t) = \chi \varepsilon_0 \mathbf{e}(t) \quad (108)$$

che generalizza la relazione valida per campi statici. La costante χ , detta polarizzabilità statica, vale $\varepsilon_r - 1$. La (108) conduce quindi alla prima delle (39).

Se invece la variazione di \mathbf{e} è rapida, i dipoli non riescono più a seguirla istantaneamente a causa della loro inerzia e pertanto la polarizzazione di un dielettrico dipenderà non solo al campo applicato in quell'istante ma anche da quello che era stato applicato precedentemente (*materiali con memoria*).

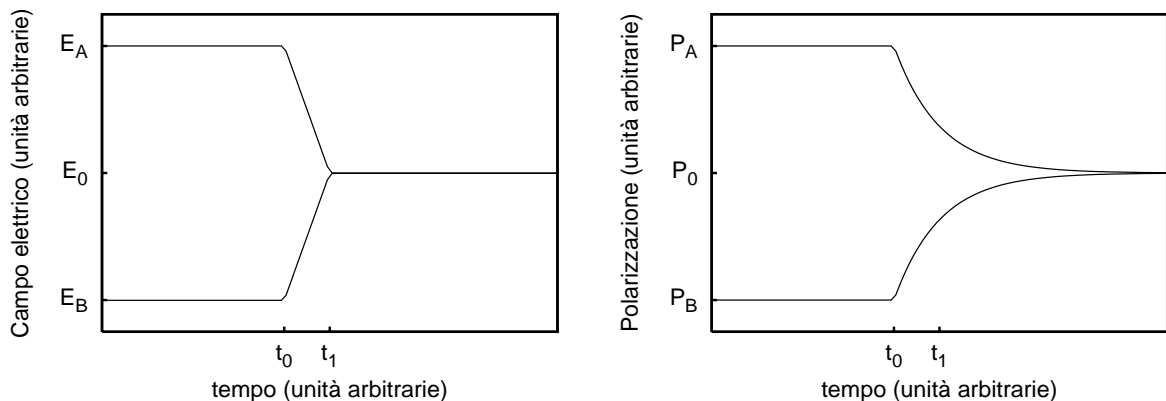


Fig. 1: Andamenti di campo elettrico e polarizzazione in un materiale con memoria

Consideriamo i due casi di Fig 1. Per $t < t_0$ il dielettrico ha una certa polarizzazione, P_A , nel caso in cui campo elettrico valga E_A , e una inferiore, P_B , se il campo vale E_B . A $t = t_0$ Il campo varia molto rapidamente portandosi, in entrambi casi, al valore E_0 all'istante t_1 . Nel caso A la polarizzazione si riduce ma, a causa della inerzia, tende a ridursi più lentamente del campo per cui all'istante t_1 sarà maggiore di quella che si avrebbe per un campo costantemente pari ad E_0 . Allo stesso modo, nel caso B, la crescita è più lenta di quella del campo e la polarizzazione resta minore di quella corrispondente a un campo pari a E_0 , che è poi anche il valore a regime, ovvero per $t \rightarrow \infty$. Il risultato è mostrate in figura 2, dove si vede che lo stesso campo, pari ad E_0 , da luogo a polarizzazioni diverse a seconda della *storia* del campo negli istanti precedenti.

Naturalmente, per determinare quando il campo varia *lentamente* (e quindi la dispersione è trascurabile) e quando varia rapidamente, occorre valutare quantitativamente quale effetto ha l'inerzia sull'effetto $\mathbf{p}(t)$ prodotto da una causa applicata $\mathbf{e}(t)$. Poiché la relazione tra $\mathbf{p}(t)$ ed $\mathbf{e}(t)$ può essere anche molto complicata, in genere viene descritta usando modelli semplici, ovviamente approssimati, ma che consentono di descrivere più facilmente il comportamento del campo in materiali dispersivi.

Il modello più semplice del comportamento di Fig. 1 è un modello esponenziale (modello del primo ordine¹). In questo modello si assume che la velocità di variazione di $\mathbf{p}(t)$ a ogni istante sia proporzionale alla differenza tra il valore *finale* di $\mathbf{p}(t)$, dato dalla (108), e quello attuale:

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} [\chi\varepsilon_0 \mathbf{e}(t) - \mathbf{p}(t)] \quad (109)$$

con τ costante empirica di proporzionalità.

Il significato fisico di τ può essere visto considerando la diseccitazione del dielettrico. Supponiamo che il dielettrico sia soggetto a un campo costante \mathbf{e}_0 che, a $t = 0$, viene bruscamente spento. Il valore di $\mathbf{p}(t)$ si ottiene dalle (109) con forzamento nullo

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \mathbf{p}(t) = 0 \quad (110)$$

La (110) è una equazione differenziale del primo ordine, con soluzione $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) e^{-t/\tau}$, dove la costante di integrazione $\mathbf{p}(0)$ è il valore dalla polarizzazione prima dello spegnimento del campo, che vale $\chi\varepsilon_0 \mathbf{e}_0$. Quindi

$$\mathbf{p}(t) = \chi\varepsilon_0 \mathbf{e}_0 e^{-t/\tau} \quad (111)$$

La costante empirica τ è dunque la costante di tempo della transizione di $\mathbf{p}(t)$ dal valore iniziale a quello finale. Dalla (111) segue in particolare che la polarizzazione decade a 0 in un tempo proporzionale a τ , con la costante di proporzionalità dell'ordine di grandezza² di 5–10. Poiché la polarizzazione si stabilisce se i costituenti elementari si muovono sotto l'azione del campo, essa scompare quando gli stessi costituenti elementari, non più spinti dal campo, si muovono, tornando ad una configurazione casuale. Questo moto verso una configurazione casuale è tanto più rapido quanto più è piccola l'inerzia dei costituenti microscopici. Ne segue che τ misura proprio questa inerzia.

Possiamo esprimere questo fatto nel dominio della frequenza, visto che siamo particolarmente interessati a segnali sinusoidali. Se il campo applicato è sinusoidale a frequenza ω_0 , ovvero $\mathbf{e}(t) = \mathbf{E} \cos(\omega_0 t)$, l'equazione (109) diventa, nelle approssimazioni del modello di primo ordine,

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} [\chi\varepsilon_0 \mathbf{E} \cos(\omega_0 t) - \mathbf{p}(t)]$$

ovvero

¹ Se consideriamo la relazione tra $\mathbf{e}(t)$ e $\mathbf{p}(t)$ come un sistema dinamico, allora il modello esponenziale corrisponde a un sistema del primo ordine, con un solo polo.

² Più precisamente, dopo 6τ il valore di $\mathbf{p}(t)$ è pari al 0.3 % di quello iniziale, , dopo 8τ allo 0.03 %

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \mathbf{p}(t) = \frac{\chi\varepsilon_0}{\tau} \mathbf{E} \cos(\omega_0 t) \quad (112)$$

Possiamo trasformare la (112) nel DF , ottenendo

$$j\omega_0 \mathbf{P} + \frac{1}{\tau} \mathbf{P} = \frac{\chi\varepsilon_0}{\tau} \mathbf{E} \quad (113)$$

in cui \mathbf{P} è il vettore complesso corrispondente alla polarizzazione sinusoidale $\mathbf{p}(t)$.

Risolvendo la (113) si ottiene

$$\mathbf{P} = \frac{\chi\varepsilon_0}{\tau} \frac{1}{j\omega_0 + \frac{1}{\tau}} \mathbf{E} = \chi\varepsilon_0 \frac{1}{1 + j\omega_0\tau} \mathbf{E} \quad (114)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{\chi}{1 + j\omega_0\tau} \right] \mathbf{E} = \varepsilon(\omega_0) \mathbf{E}$$

La (114) consente di calcolare la costante dielettrica complessa

$$\varepsilon(\omega_0) = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{\chi}{1 + j\omega_0\tau} \right] \quad (115)$$

dipendente dalla frequenza (ma, in ogni dato problema nel DF , fissata, essendo fissata la frequenza).

Dalla (114) segue che un materiale è non dispersivo se la frequenza ω_0 a cui viene sollecitato è sufficientemente piccola da soddisfare $\omega_0\tau \ll 1^3$.

D'altra parte il valore di τ dipende dalla inerzia dei costituenti microscopici del materiale rispetto alla polarizzazione, e quindi l'intervallo di frequenza in cui il materiale è dispersivo, dipende da tale inerzia. Nel caso dei dielettrici occorre distinguere tra quei dielettrici, come l'acqua, che si polarizzano soprattutto per orientazione e quelli che si polarizzano per deformazione. Nel primo caso è tutta la molecola che deve ruotare, e quindi il valore di τ è notevolmente più grande che per la polarizzazione per deformazione, in cui è solo la nuvola atomica che si deforma. Valori tipici di τ per l'acqua a temperatura ambiente sono intorno ai 10 psec , corrispondenti ad avere $\omega_0/2\pi$ pari a 16 GHz . Ne segue che l'acqua può essere considerata non dispersiva solo fino alle decine di MHz . oltre questi valori, e fino ad alcune centinaia di MHz , la parte reale di $\varepsilon(\omega)$ resta ancora sostanzialmente pari al valore per frequenza nulla, mentre compare una parte immaginaria significativa. Alle temperature del corpo umano, circa 40°C , χ diventa circa 72, mentre il valore di τ dimezza, e quindi tutte le frequenze precedenti vanno raddoppiate.

Materiali con molecole non polari, prive di dipoli permanenti che possano orientarsi, e che quindi si polarizzano solo per deformazione, hanno invece valori di τ molto più piccoli e possono essere considerati non dispersivi anche per frequenze di decine di GHz .

Il modello del primo ordine (109) può essere applicato anche alla relazione tra \mathbf{b} e \mathbf{h} ed a quella tra \mathbf{j}_i e \mathbf{e} , con considerazioni simili. In particolare, la \mathbf{j}_i è dovuto in genere al moto di elettroni liberi, che sono molto leggeri. Quindi la relazione tra \mathbf{j}_i e \mathbf{e} è considerabile non dispersiva fino a frequenze molto elevate (centinaia di GHz e oltre).

³ La (114) implica anche che un materiale diventa equivalente al vuoto non appena $\omega_0\tau \gg 1$. In realtà, come vedremo più avanti, è vero che per $\omega_0 \rightarrow \infty$ tutti i materiali diventano simili al vuoto, ma occorrono frequenze molto più grandi di quella minima che soddisfi $\omega_0\tau \gg 1$

Per quanto riguarda la relazione tra \mathbf{b} e \mathbf{h} , occorre preliminarmente distinguere i materiali *ferromagnetici* da tutti gli altri. Sono ferromagnetici i metalli ferrosi (ferro, nichel, cobalto), le loro leghe (acciaio, ghisa) e i loro minerali (magnetite). Sono anche ferromagnetici le *ferriti*, materiali costituiti da ceramiche e polvere di metalli. Per tutti i materiali non ferromagnetici, la relazione tra \mathbf{b} e \mathbf{h} è semplicemente⁴ $\mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h}$ ovvero si comportano come il vuoto ($\mu_r \simeq 1$). Per i materiali ferromagnetici, invece, i costituenti che rispondono al campo orientandosi sono i *domini magnetici*, costituiti da molti atomi insieme, e quindi hanno inerzia elevatissima. Pertanto i materiali ferromagnetici (escluse le ferriti) sono dispersivi anche a bassa frequenza, e con valori di μ_r molto elevati (anche superiori a 10000). Tuttavia, già a frequenze di poche decine di *MHz* (dipendenti dal materiale) perdono del tutto le loro caratteristiche magnetiche, ovvero acquistano anch'esse la risposta magnetica del vuoto.

Poiché i materiali dielettrici sono spesso dispersivi alle frequenze di nostro interesse, conviene esaminare più in dettaglio il comportamento di un materiale che segue il modello del primo ordine (109,115), detto *modello di Debye* (o, più precisamente, modello di Debye del primo ordine). Separiamo parte reale e immaginaria della (115)

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\chi\varepsilon_0}{1 + \omega^2\tau^2} - j \frac{\chi\varepsilon_0\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (116)$$

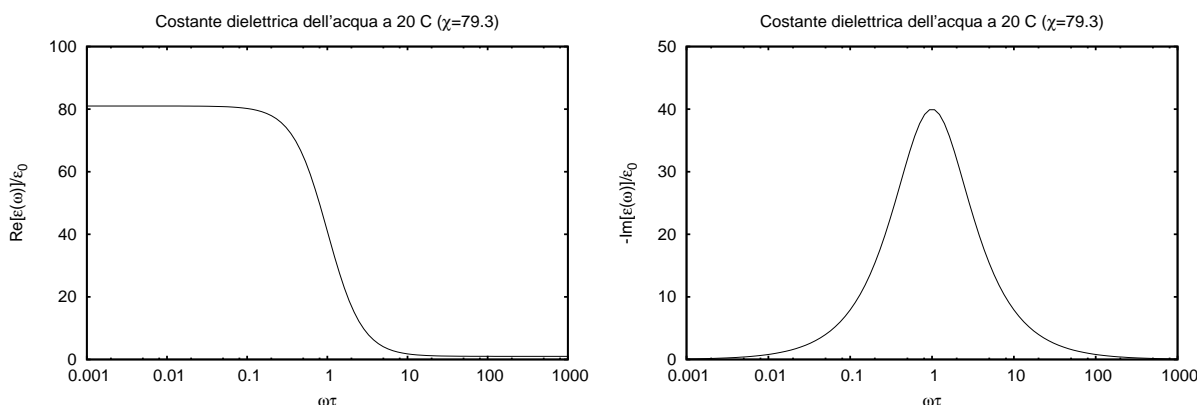


Fig. 1: Modello di Debye della costante dielettrica complessa (normalizzata a ε_0) dell'acqua. A sinistra la parte reale, a destra quella immaginaria.

La parte immaginaria della (116) è il termine di dissipazione, ed è ovviamente negativa (vedi (73)). Il suo valore assoluto ha un andamento, riportato in Fig. 1b, particolarmente interessante. Ha infatti un andamento a *campana*, essendo nullo per $\omega = 0$ e per $\omega = \infty$, e presentando un unico massimo. Derivando e uguagliando a zero la parte immaginaria della (116) si ottiene la posizione del massimo

⁴ In realtà tutti i materiali hanno una $\mu_r \neq 1$ (e si dicono i magnetici se $\mu_r < 1$ e paramagnetici se $\mu_r > 1$). Tuttavia la differenza $|\mu_r - 1|$ è sempre trascurabile nelle applicazioni ingegneristiche.

$$\frac{\chi \varepsilon_0 \tau [1 + \omega^2 \tau^2] - 2\omega \tau^2 \chi \varepsilon_0 \omega \tau}{[1 + \omega^2 \tau^2]^2} = 0$$

$$1 + \omega^2 \tau^2 = 2\omega^2 \tau^2$$

$$\omega = \frac{1}{\tau}$$

L'intervallo di frequenza in cui si ha dissipazione è quindi *risonante* con un picco di risonanza a $1/\tau$. Alla frequenza di risonanza $\omega = 1/\tau$ si ha

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\tau}\right) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\chi}{2}\right) - j \frac{\chi \varepsilon_0}{2}$$

e quindi la parte immaginaria (dissipazione) è circa pari alla parte reale, ovvero pari alla metà della costante dielettrica statica $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 (1 + \chi)$. Comunque, l'intervallo di frequenze in cui vi è dissipazione è molto largo, come si vede dalla Fig. 1b (che, ricordiamo, è in scala logaritmica). Si nota infatti che per frequenze $\omega = 0.1/\tau$ e $\omega = 10/\tau$, la dissipazione è ancora il 20% di quella massima.

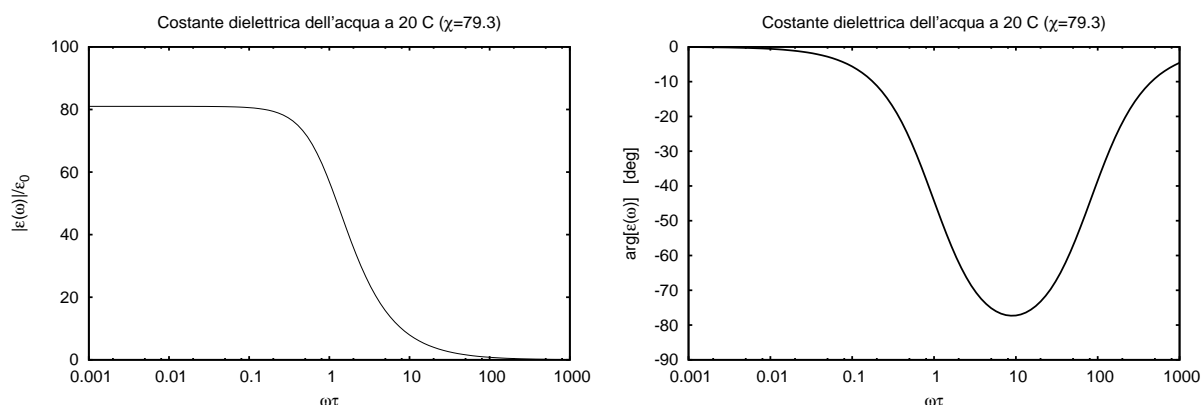


Fig. 2: Modello di Debye della costante dielettrica complessa (normalizzata a ε_0) dell'acqua. A sinistra il modulo, a destra la fase.

In Fig. 2 è invece rappresentato il modulo e la fase della costante dielettrica, ovvero l'ampiezza delle oscillazioni di \mathbf{P} , fissato il campo impresso \mathbf{E} , e il suo ritardo di fase.

L'analisi delle figure 1 e 2 conferma poi che τ misura effettivamente l'inerzia al moto dei costituenti microscopici. Partiamo dall'andamento della parte reale di (116) che è riportato in Fig. 1a. Si vede da questo che la polarizzazione, proporzionale a $\text{Re}[\varepsilon(\omega)]/\varepsilon_0$, segue $\mathbf{e}(t)$ istantaneamente fino a frequenze dell'ordine di grandezza di $0.1/\tau$. Successivamente la risposta si riduce, e, come mostra la fase di Fig. 2b, ritarda, mostrando che i costituenti elementari non riescono più a seguire il campo esterno in modo istantaneo, a causa della loro inerzia. Per frequenze superiori il ritardo aumenta molto, ovvero le particelle seguono solo con ritardo il campo applicato, finché, a frequenze maggiori di $10/\tau$ la risposta diventa sostanzialmente trascurabile, in quanto le particelle sono troppo pesanti per muoversi.

Concludiamo questo paragrafo notando che il modello di Debye è solo una prima approssimazione della risposta di un dielettrico. Considerando, ad esempio, l'acqua, le sue molecole si polarizzano per orientazione, e sono responsabili della elevata $\varepsilon(0)$, pari a circa 81. Tuttavia le molecole d'acqua hanno una inerzia notevole, e il picco di assorbimento si ha, come già detto, intorno a 16 GHz a temperatura ambiente. Oltre il centinaio di GHz l'effetto della polarizzazione per orientazione si annulla. Tuttavia l'acqua ha una costante dielettrica diversa da 1 anche a frequenze ottiche ($3 \cdot 10^5 \text{ GHz}$). Ciò avviene perché le molecole d'acqua si polarizzano anche per deformazione. La polarizzazione per deformazione produce una costante dielettrica piccola, ma ha un valore di τ molto più piccolo. Se la frequenza è molto più alta di quella a cui si ha il picco di assorbimento dell'acqua, la polarizzazione per orientazione scompare, ma rimane quella per deformazione.

Di questo fatto si può tener conto con un modello di Debye di ordine superiore:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{\chi_1}{1 + j\omega\tau_1} + \frac{\chi_2}{1 + j\omega\tau_2} + \dots \right] \quad (117)$$

in cui ogni termine in parentesi corrisponde a un meccanismo di polarizzazione (e risulta in genere $\chi_1 \gg \chi_2 \gg \dots$ e $\tau_1 \gg \tau_2 \gg \dots$).

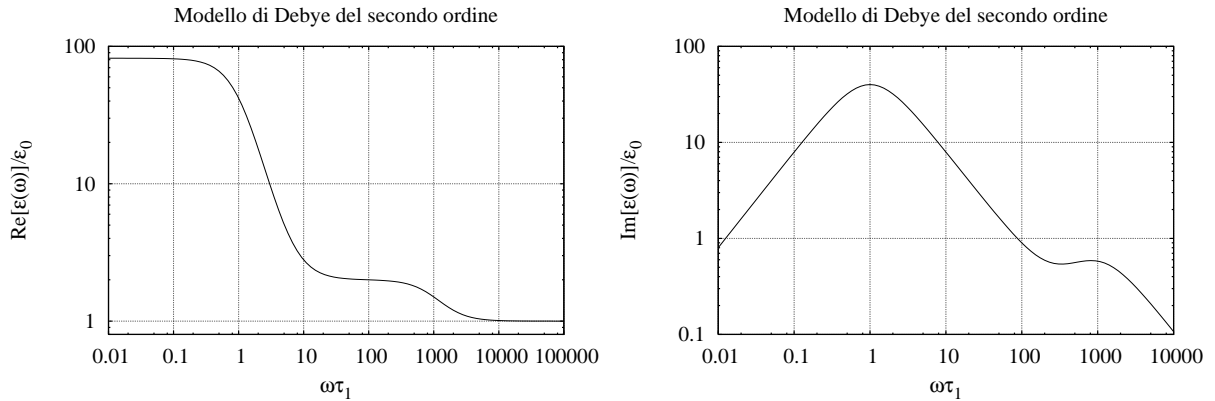


Fig. 3: Andamento della costante dielettrica complessa (normalizzata a ε_0) per un modello di Debye del secondo ordine. A sinistra la parte reale, a destra quella immaginaria.

I grafici delle parti reali e immaginarie sono riportati in Fig. 3, per $\chi_1 = 80$, $\chi_2 = 1$ e $\tau_1 = 1000\tau_2$. Si noti che, al contrario di Fig. 1, anche la scala verticale è logaritmica, e la scala orizzontale è pari a $\omega\tau_1$. Si spiegano così la seconda transizione (prossima a $\omega\tau_1 = 1000$) tra parti costanti, corrispondente al secondo picco, molto poco pronunciato (essendo χ_2 relativamente piccolo), della parte immaginaria.

Più semplicemente, se interessa solo il comportamento per $\omega\tau_2 \ll 1$ (per l'acqua, questo copre tutto l'intervallo delle microonde, fino ad alcuni THz), si può usare un modello del primo ordine modificato

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \frac{\chi}{1 + j\omega\tau} + \varepsilon_\infty \quad (118)$$

in cui $\varepsilon_\infty > \varepsilon_0$ è il valore ¹ della costante dielettrica per valori di frequenza molto più grandi di $1/\tau$. Nel caso dell'acqua a $20^\circ C$ si ha, nella (118), $\chi = 75.1$ e $\varepsilon_\infty = 5.2\varepsilon_0$.

Nel caso della Fig. 3, la (118) vale circa fino a $\omega\tau = 100$

Concludiamo questa descrizione notando che la presenza, nei liquidi, di ioni, modifica anche in maniera significativa la risposta a un campo elettrico. In particolare, l'acqua non distillata contiene sempre degli ioni che danno luogo a una conducibilità σ_i (piccola per l'acqua dolce, ma che può arrivare a vari S/m per l'acqua di mare) il cui effetto si somma a quello dielettrico dato dal modello di Debye. La costante dielettrica equivalente (62) dell'acqua di mare vale

$$\varepsilon_e(\omega) = \varepsilon_0 \frac{\chi}{1 + j\omega_0\tau} + \varepsilon_\infty - j \frac{\sigma_i}{\omega} = \left[\varepsilon_\infty + \frac{\chi\varepsilon_0}{1 + \omega^2\tau^2} \right] - j \left[\frac{\chi\varepsilon_0\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} + \frac{\sigma_i}{\omega} \right]$$

20 VETTORI COMPLESSI – POLARIZZAZIONE

Un vettore complesso è un ente che rappresenta una grandezza vettoriale che varia sinusoidalmente nel tempo.

Consideriamo infatti un vettore $\mathbf{e}(t)$ che vari sinusoidalmente nel tempo. In tal caso le tre componenti di $\mathbf{e}(t)$, ovvero $e_x(t)$, $e_y(t)$, $e_z(t)$, sono grandezze scalari che variano anch'esse sinusoidalmente nel tempo, e possono ciascuna essere rappresentata da un *fasore* o numero complesso, rispettivamente E_x , E_y , E_z . Il vettore $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ rappresenterà la grandezza reale $\mathbf{e}(t)$, così come un numero complesso rappresenta una funzione scalare sinusoidale.

Le operazioni sui vettori complessi sono definite come quelle su vettori reali, tranne che occorre distinguere ¹ tra prodotto scalare di un vettore complesso per se stesso, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$, e modulo quadro dello stesso vettore $|\mathbf{E}|^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} &= E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 \\ |\mathbf{E}|^2 &= |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2 \end{aligned}$$

Il modulo quadro del vettore \mathbf{E} può anche essere calcolato come prodotto scalare tra il vettore ed il suo complesso coniugato

$$|\mathbf{E}|^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$$

È importante notare che il modulo quadro di un vettore complesso \mathbf{E} si annulla se e solo se il vettore è nullo, mentre il quadrato di un vettore complesso può essere nullo anche se

¹ Se riscriviamo la (118) nella forma

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{\chi}{1 + j\omega\tau} \right] + [\varepsilon_\infty - \varepsilon_0]$$

ne risulta più chiaro il significato. In particolare $\varepsilon_\infty - \varepsilon_0$ è il contributo, a bassa frequenza, di tutti i termini della (117) escluso i primi due.

¹ Ricordiamo che queste due quantità sono uguali per vettori reali

il vettore è diverso da zero (basta considerare, ad esempio, il vettore diverso da zero $\mathbf{i}_x + j\mathbf{i}_y$, il cui quadrato è nullo).

Oltre che per componenti, un vettore complesso può essere decomposto in parte reale e immaginaria:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} + j\mathbf{B} \quad (119)$$

con \mathbf{A} e \mathbf{B} vettori reali. Tale decomposizione risulta molto utile per descrivere il vettore nel tempo. Si ha infatti

$$\mathbf{e}(t) = \operatorname{Re} \left[(\mathbf{A} + j\mathbf{B}) e^{j\omega_0 t} \right] = \mathbf{A} \cos \omega_0 t - \mathbf{B} \sin \omega_0 t \quad (120)$$

Segue quindi che un vettore sinusoidale puro come $\mathbf{e}(t)$ giace sempre nel piano individuato dai vettori reali \mathbf{A} , \mathbf{B} in ogni istante di tempo t . Pertanto è sempre possibile, per un tale vettore, definire un piano, detto *piano di polarizzazione*, a cui il vettore appartiene.² Per comodità, nel seguito della discussione sceglieremo sempre il sistema di riferimento in modo che l'asse z sia ortogonale al piano di polarizzazione. Inoltre $\mathbf{e}(t)$, campo elettrico in un certo punto dello spazio P , (e che supponiamo applicato nello stesso punto P), è una funzione periodica del tempo, per cui il suo estremo descrive, nel piano di polarizzazione, una curva chiusa al variare del tempo.

Si può dimostrare (vedi App. 2) che tale curva è un'ellisse e si dice pertanto che il vettore sinusoidale $\mathbf{e}(t)$ è un vettore **polarizzato** e che la sua polarizzazione è in generale ellittica. Esistono però due casi particolari di polarizzazione, che sono poi quelli utilizzati in tutti i sistemi di telecomunicazioni:

- **polarizzazione lineare** quando l'ellisse degenera in un segmento di retta;
- **polarizzazione circolare** quando l'ellisse degenera in una circonferenza.

Esistono infinite polarizzazioni lineari, che si distinguono per la direzione della retta, mentre vi sono solo due polarizzazioni circolari, che si distinguono per il verso, levogiro o destrogiro³, con cui viene percorsa, da $\mathbf{e}(t)$, la circonferenza.

Notiamo anche che, mentre per i vettori reali è sempre possibile definire un versore, questo non si estende al caso di vettori complessi, a meno che questi non siano *polarizzati linearmente*. Se infatti \mathbf{E} è polarizzato linearmente, allora la corrispondente grandezza del dominio del tempo giace sempre su di una retta (ovvero ha sempre la stessa direzione). Pertanto possiamo porre

$$\mathbf{E} = E \mathbf{i}_E$$

dove il versore \mathbf{i}_E è un versore reale, mentre lo scalare E , detto ampiezza del campo, è un numero complesso.

Una ulteriore differenza tra vettori reali e complessi è nella nozione di parallelismo. Consideriamo due vettori complessi \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 . Questi due vettori sono paralleli se esiste uno scalare α tale che

² Per vettori comunque variabili nel tempo ciò non è più vero. Tuttavia esistono molti casi di campi elettromagnetici che sono sempre ortogonali ad una direzione, ad esempio le *onde piane*. Per tali campi è ancora possibile definire un piano di polarizzazione

³ Queste due polarizzazioni vengono in genere indicate con gli acronimi inglesi *LHCP* e *RHCP*, ovvero *left-hand* e *right-hand circular polarization*.

$$\mathbf{E}_1 = \alpha \mathbf{E}_2$$

Se α è reale allora i due vettori corrispondenti nel dominio del tempo sono, istante per istante, paralleli. Se invece α è complesso, questo non è più vero. Infatti la condizione *matematica* di parallelismo nel dominio della frequenza equivale solo alla condizione *fisica* di avere la stessa polarizzazione.

Naturalmente non sempre è possibile ottenere una polarizzazione lineare o circolare pura, e conviene quindi introdurre una quantità che consenta di misurare la *qualità* di una polarizzazione, ovvero di indicare quanto una polarizzazione si avvicina ad una polarizzazione lineare o circolare pura. Questa quantità è il **rapporto assiale**, indicato normalmente con la sigla AR (acronimo della espressione inglese *axial ratio*), definito come il rapporto tra il massimo ed il minimo del modulo del vettore $\mathbf{e}(t)$:

$$AR = \frac{\max |\mathbf{e}(t)|}{\min |\mathbf{e}(t)|} \quad (121)$$

(o, equivalentemente, come il rapporto tra gli assi dell'ellisse di polarizzazione) e compreso in $[1, \infty)$.

È evidente che i due casi di polarizzazione lineare e circolare sono proprio i casi limite del rapporto assiale

$$AR = 1 \iff \text{polarizzazione circolare} \quad (122)$$

$$AR = \infty \iff \text{polarizzazione lineare}$$

È anche ovvio che un rapporto assiale molto grande indica una polarizzazione prossima a una polarizzazione lineare, così come un rapporto assiale poco più grande di 1 indica una polarizzazione prossima a quella circolare. Utilizzando il rapporto assiale è possibile fissare le specifiche di polarizzazione di un sistema di comunicazione. Ad esempio, un sistema in polarizzazione nominale circolare può spesso accettare campi anche non polarizzati circolarmente, purché il loro rapporto assiale sia inferiore a un valore normalmente compreso tra 1.5 e 2.

21 DETERMINAZIONE DELLE CONDIZIONI DI POLARIZZAZIONE LINEARE E CIRCOLARE

Per determinare le condizioni di polarizzazione lineare e circolare, e per calcolare il rapporto assiale, notiamo preliminarmente che le lunghezze dei due semiassi dell'ellisse di polarizzazione sono anche il valore minimo e massimo della distanza dell'ellisse stesso dall'origine. Per calcolare tali punti estremali, consideriamo

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}(t)|^2 &= |\mathbf{A} \cos \omega_0 t - \mathbf{B} \sin \omega_0 t|^2 \\ &= A^2 \cos^2 \omega_0 t + B^2 \sin^2 \omega_0 t - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t \\ &= A^2 \cos^2 \omega_0 t + B^2 \sin^2 \omega_0 t - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \sin 2\omega_0 t \end{aligned} \quad (123)$$

avendo utilizzato le formule di duplicazione delle funzioni circolari, e indicato con $A^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, $B^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$.

L'espressione precedente è la distanza (al quadrato) $D(t)$ dei punti dell'ellisse dall'origine, al variare di t . La sua derivata vale

$$\begin{aligned} D'(t) &= -2\omega_0 A^2 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t + 2\omega_0 B^2 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t - 2\omega_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cos 2\omega_0 t \\ &= 2\omega_0 \left[-\frac{A^2 - B^2}{2} \sin 2\omega_0 t - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cos 2\omega_0 t \right] \end{aligned}$$

La polarizzazione **circolare** è caratterizzata dall'aver la distanza $D(t)$ costante, e quindi $D'(t) = 0$, $\forall t$. Di conseguenza le condizioni di polarizzazione circolare sono

$$A^2 = B^2 \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

e devono essere valide entrambe.

Per considerare le altre polarizzazioni, riscriviamo la (123) dividendola per $\cos^2 \omega_0 t$:

$$D(t) = A^2 + B^2 \tan^2 \omega_0 t - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \tan \omega_0 t = B^2 T^2 - 2AB \cos \theta T + A^2$$

avendo posto per semplicità $\tan \omega_0 t = T$ e ricordando che, essendo \mathbf{A} e \mathbf{B} vettori reali, risulta $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$ dove θ è l'angolo tra \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Per avere polarizzazione lineare deve esistere un istante t (ovvero un valore di T) in cui $D(t) = 0$. In altri termini l'equazione

$$B^2 T^2 - 2AB \cos \theta T + A^2 = 0 \tag{124}$$

deve avere almeno una radice reale. La condizione di realtà delle radici è che il relativo discriminante sia non negativo. Calcoliamo il discriminante della equazione

$$(AB \cos \theta)^2 - (B^2)(A^2) = A^2 B^2 (\cos^2 \theta - 1) = A^2 B^2 (-\sin^2 \theta) = -|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2$$

Il discriminante è non positivo, e quindi la (124) ha radici reali se e solo se

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$$

che è la condizione di polarizzazione lineare

22 RAPPORTO ASSIALE E CONDIZIONI DI POLARIZZAZIONE LINEARE E CIRCOLARE IN TERMINI DI COMPONENTI

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che valgono le seguenti condizioni *necessarie e sufficienti*:

$$\text{polarizzazione lineare} \iff \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \tag{125}$$

$$\text{polarizzazione circolare} \iff \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{e} \quad |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| \quad (126)$$

Si noti che per avere polarizzazione lineare basta una sola condizione, mentre per avere polarizzazione circolare ne occorrono due. Questo è coerente col fatto che esistono infinite polarizzazioni lineari, e solo due polarizzazioni circolari.

Le condizioni di polarizzazione lineare (125) e circolare (126) coinvolgono la parte reale e immaginaria del vettore \mathbf{E} . È spesso più utile valutare la polarizzazione utilizzando le componenti complesse⁴ E_x , E_y del vettore \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i}_x + E_y \mathbf{i}_y \quad \text{con} \quad E_x = |E_x| e^{j\delta_x}, \quad E_y = |E_y| e^{j\delta_y} \quad (127)$$

Se usiamo la rappresentazione (127) il rapporto assiale ha una espressione molto semplice (benché la sua dimostrazione sia molto complessa). Se $\chi \in (0, \pi/4)$ è definito da

$$\sin 2\chi = \frac{2|E_x||E_y|}{|\mathbf{E}|^2} |\sin(\delta_y - \delta_x)| \quad (128)$$

allora il rapporto assiale è dato da

$$AR = \frac{1}{\tan \chi} \quad (129)$$

Dalla (129) segue che:

- $\chi = 0$ polarizzazione lineare;
- $\chi = \pi/4$ polarizzazione circolare.

Queste considerazioni ci consentono di ricavare le condizioni necessarie per queste due polarizzazioni in termini di componenti.

Per la polarizzazione lineare deve essere $\sin 2\chi = 0$, ovvero l'annullamento del secondo membro di (128). Questo annullamento si ottiene in uno qualunque dei seguenti casi (mutualmente escludentesi)

- 1) $E_x = 0$;
- 2) $E_y = 0$;
- 3f) $|\sin(\delta_y - \delta_x)| = 0$ ovvero $\delta_y - \delta_x = n\pi$, con n intero.

che sono quindi le condizioni necessarie per la **polarizzazione lineare**.

La condizione 3f può essere espressa anche come

- 3) E_x ed E_y hanno la stessa fase oppure sono sfasati di π .

che è equivalente alla 3f.

Per la polarizzazione circolare si deve avere $\sin 2\chi = 1$ ovvero, dalla (128)

$$2|E_x||E_y| |\sin(\delta_y - \delta_x)| = |\mathbf{E}|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2$$

Aggiungiamo $-2|E_x||E_y|$ ad ambo i membri ottenendo

$$2|E_x||E_y| (|\sin(\delta_y - \delta_x)| - 1) = |E_x|^2 + |E_y|^2 - 2|E_x||E_y| = (|E_x| - |E_y|)^2$$

⁴ La componente z è nulla per la scelta del sistema di riferimento che abbiamo fatto.

Il primo membro è non positivo, il secondo è non negativo, e quindi possono essere uguali solo se sono entrambi nulli. Poiché le due componenti dei campi devono essere entrambe diverse da 0, allora

$$|\sin(\delta_y - \delta_x)| = 1 \quad \text{e} \quad (|E_x| - |E_y|)^2 = 0$$

Condizione necessaria per avere **polarizzazione circolare** è pertanto il verificarsi di entrambe le condizioni seguenti

- 1) $|E_x| = |E_y|$;
- 2) $\delta_y - \delta_x = \pm \pi/2$.

Passiamo alla dimostrazione della sufficienza. Se vale una qualunque delle condizioni 1), 2), 3) viste prima la polarizzazione è **lineare**.

Se una delle componenti di \mathbf{E} è nulla, allora \mathbf{A} e \mathbf{B} hanno solo l'altra componente e sono quindi allineati, pertanto il loro prodotto vettoriale è nullo. Resta quindi da considerare solo il caso 3). Se E_x ed E_y hanno la stessa fase (o sono sfasate di π), allora esiste un numero reale p tale che $E_x = pE_y$, e quindi

$$A_x = pA_y \quad , \quad B_x = pB_y$$

Calcolando il prodotto vettoriale si trova

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{i}_z = [(pA_y)B_y - A_y(pB_y)] \mathbf{i}_z = 0$$

che garantisce la polarizzazione lineare

Dimostriamo invece che se valgono le due condizioni $|E_x| = |E_y|$, e E_x , E_y sfasati di $\pm \frac{\pi}{2}$ allora la polarizzazione è circolare. In questo caso occorre verificare entrambe le condizioni di polarizzazione circolare espresse sui vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Le condizioni sulle componenti di \mathbf{E} possono essere riassunte in $E_x = sjE_y$, dove s vale ± 1 . Di conseguenza

$$A_x = -sB_y \quad , \quad B_x = sA_y \tag{130}$$

Calcolando il prodotto scalare si trova

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x B_x + A_y B_y) = [(-sB_y)(sA_y) + A_y B_y] = 0$$

in quanto $s^2 = 1$. Inoltre, usando le (130)

$$|\mathbf{A}|^2 = |A_x|^2 + |A_y|^2 = |B_x|^2 + |B_y|^2 = |\mathbf{B}|^2$$

che conclude la dimostrazione.

APPENDICE 1: DISTRIBUZIONI TRIDIMENSIONALI

La distribuzione $\delta(t - t_0)$ di Dirac rappresenta, nel caso monodimensionale, grandezze che risultano concentrate in t_0 . È ovviamente possibile, e utile, rappresentare, mediante enti matematici analoghi, grandezze concentrate nello spazio a 3 dimensioni.

In particolare, per rappresentare una quantità concentrata in $\underline{r} - \underline{r}_0$ è possibile usare la distribuzione δ tridimensionale

$$\delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$$

che ha le dimensioni di $m^{(-3)}$. In coordinate cartesiane, posto $\underline{r} = (x, y, z)$ e $\underline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, vale la relazione

$$\delta(\underline{r} - \underline{r}_0) = \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0)$$

in cui a secondo membro vi è il prodotto di δ monodimensionali.

Le proprietà più utilizzate di $\delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$ sono (analogamente al caso monodimensionale)

$$f(\underline{r})\delta(\underline{r} - \underline{r}_0) = f(\underline{r}_0)\delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\underline{r} - \underline{r}_0) dV = \begin{cases} 1 & \underline{r}_0 \in \mathcal{V} \\ 0 & \underline{r}_0 \notin \mathcal{V} \end{cases}$$

Per la prima relazione occorre che $f(\underline{r})$ sia continua in \underline{r}_0 . Nella seconda, qualora \underline{r}_0 sia sulla frontiera di \mathcal{V} , va specificato se \underline{r}_0 appartiene o no al dominio di integrazione.

Anche su $\delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$ si possono definire operazioni differenziali (sia derivate parziali semplici, sia tramite l'operatore ∇), e integrali, tra cui la trasformata di Fourier:

$$\int \delta(\underline{r} - \underline{r}_0) e^{-j\mathbf{k}\cdot\underline{r}} dV = e^{-j\mathbf{k}\cdot\underline{r}_0}$$

utilizzando le proprietà base della distribuzione δ .

Si può inoltre dimostrare ¹ che

$$\nabla^2 \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_0|} = -4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$$

APPENDICE 2: EQUAZIONI DI MAXWELL E PRINCIPI DI KIRCHHOFF

La teoria dei circuiti si basa sui due principi di Kirchhoff, ovvero

¹ Tale relazione è in realtà già nota dalla elettrostatica, collegando il potenziale di una carica puntiforme alla sua densità di carica, tramite l'equazione di Poisson

- la somma *algebraica* delle correnti entranti in un nodo é nulla;
- la somma *algebraica* delle cadute di tensione lungo una maglia é nulla.

Queste due relazioni possono essere approssimativamente ricavate dalle equazioni di Maxwell (58), e in particolare dalla legge di Faraday, e dalla continuit  della carica, che riscriviamo:

$$\begin{aligned}\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -j\omega \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} &= -j\omega Q = -j\omega \oint_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}\tag{58}$$

Se i campi sono costanti nel tempo, i secondi membri sono nulli, e quindi sono nulli i primi membri delle due equazioni precedenti. Ma evidentemente, per frequenza piccola, possiamo ancora scrivere approssimativamente

$$\begin{aligned}\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &\simeq 0 && \forall c \\ \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} &\simeq 0 && \forall S\end{aligned}\tag{131}$$

Tuttavia, se si vuole utilizzare questa approssimazione, occorre stabilire, almeno qualitativamente¹ i suoi limiti di validit . Poich  a frequenza bassa corrisponde lunghezza d'onda nel vuoto λ_0 grande,   possibile considerare questi limiti di validit  sulla lunghezza d'onda. Le (131) valgono se

$$\lambda_0 \gg \text{diam}(S)\tag{132}$$

dove il diametro di un insieme   il diametro della minima sfera che include l'insieme, ovvero la massima distanza tra due punti dell'insieme.

Supponiamo che valga la (132), e quindi le (131), e vediamo le conseguenze.

La seconda delle (131) implica che la corrente totale che entra in un volume   nulla. In altri termini, la seconda delle (131)   nient'altro che il primo principio di Kirchhoff.

Consideriamo poi la prima delle (131). Se prendiamo due punti A e B sulla curva c , la curva stessa viene divisa in due parti, c_1 e c_2 . La prima delle (131) diventa

$$\int_A^B \mathbf{E}|_{c_1} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^A \mathbf{E}|_{c_2} \cdot d\mathbf{l} = 0 \implies \int_A^B \mathbf{E}|_{c_1} \cdot d\mathbf{l} = - \int_B^A \mathbf{E}|_{c_2} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E}|_{c_2} \cdot d\mathbf{l}\tag{133}$$

in cui abbiamo indicato esplicitamente su quale curva   fatto l'integrale. Ricordiamo poi che il verso di $d\mathbf{l}$   dall'estremo inferiore a quello superiore.

Dalla (133) segue che   possibile definire una differenza di potenziale

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

che risulta indipendente dalla linea su cui   fatto l'integrale.

¹ Una valutazione quantitativa, in un caso particolare, si pu  ottenere analizzando un dipolo elementare in ricezione.

Consideriamo poi N punti, A_1, A_2, \dots, A_N . Possiamo considerare una curva chiusa c che passa per questi N punti, in ordine, e applicare la prima delle (131) a tale curva. Dividendo la curva in N parti segue

$$\int_{A_1}^{A_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{A_2}^{A_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \dots + \int_{A_N}^{A_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

ovvero

$$V_{21} + V_{32} + \dots + V_{1N} = 0 \quad (134)$$

che è una possibile forma del secondo principio di Kirchhoff.

Ne segue che i principi di Kirchhoff sono la prima approssimazione delle equazioni di Maxwell, nella ipotesi che le dimensioni degli oggetti in gioco siano molto più piccole della lunghezza d'onda. Il che vale sempre nei circuiti, che sono, per definizione, costituiti da oggetti di dimensioni nulle. Di conseguenza, è possibile rappresentare come componenti di circuiti *a costanti concentrate* solo oggetti (resistori, induttori, condensatori) piccoli rispetto alla lunghezza d'onda.

APPENDICE 3: DISSIPAZIONE NEL MODELLO DI DEBYE

L'andamento a campana della dissipazione può essere spiegato ricorrendo al teorema di Poynting.

Se scriviamo la legge di Ampère generalizzata introducendo la polarizzazione \mathbf{P} al posto del vettore \mathbf{D}

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0\mathbf{E} + j\omega\mathbf{P} + \mathbf{J}$$

e la usiamo nel teorema di Poynting al posto della seconda delle (66) troviamo che nel bilancio della parte reale compare il termine

$$\mathcal{D}_d = \text{Re} \left[\frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot (j\omega\mathbf{P}^*) dV \right] = \text{Re} \left[\frac{j\omega}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}^* dV \right] \quad (135)$$

che rappresenta la dissipazione dovuta al dielettrico.

Se lo esaminiamo alla luce del modello di Debye, si vede che, per frequenze piccole, \mathbf{P} è grande ma in fase con \mathbf{E} . Pertanto l'integrando della (135) è reale e \mathcal{D}_d si annulla.

Al crescere della frequenza, l'ampiezza della polarizzazione dapprima rimane costante, poi comincia a ridursi prima lentamente e poi molto rapidamente, finché non diventa praticamente zero. Viceversa, lo sfasamento tra \mathbf{P} e \mathbf{E} inizia a ridursi quasi subito. La fase dell'integrando in (135) inizia subito ad essere diversa da zero e quindi aumentano le perdite. Avvicinandosi a $\omega = 1/\tau$, le perdite aumentano in quanto la fase è ora molto diversa da 0, mentre l'ampiezza delle oscillazioni tende a restare paragonabile a quella a bassa frequenza. Superata, invece, questa frequenza, la riduzione molto rapida di $|\epsilon(\omega)$, e quindi della ampiezza della polarizzazione, fa diminuire la dissipazione, finché, per frequenze grandi, non si annulla in quanto si annulla la polarizzazione.

APPENDICE 4: DIMOSTRAZIONE CHE $\mathbf{e}(t)$ DESCRIVE UN ELLISSE

Come abbiamo detto, l'estremo del vettore $\mathbf{e}(t)$, campo elettrico in un certo punto dello spazio P , (e che supponiamo applicato nello stesso punto P) descrive una curva chiusa al variare del tempo nel piano di polarizzazione passante per P . Se scegliamo un sistema di riferimento centrato in P , le coordinate $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ dell'estremo del vettore $\mathbf{e}(t)$ sono date da:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= A_x \cos \omega_0 t - B_x \sin \omega_0 t \\ \mathcal{Y} &= A_y \cos \omega_0 t - B_y \sin \omega_0 t\end{aligned}\tag{136}$$

Possiamo passare da queste equazioni (parametriche) alle equazioni esplicite della curva eliminando il parametro t . Per fare questo possiamo risolvere le (136) rispetto a $\cos \omega_0 t$ e $\sin \omega_0 t$, e poi sfruttare la relazione

$$\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t = 1$$

Risolvendo le (136) col metodo di Cramer si ottiene

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{D} (B_x \mathcal{Y} - B_y \mathcal{X}) \quad \sin \omega_0 t = \frac{1}{D} (A_x \mathcal{Y} - A_y \mathcal{X})$$

essendo $D = B_x A_y - B_y A_x$ il determinante del sistema. Quadrando e sommando si ottiene

$$(B_x \mathcal{Y} - B_y \mathcal{X})^2 + (A_x \mathcal{Y} - A_y \mathcal{X})^2 = D^2$$

ovvero

$$(A_y^2 + B_y^2) \mathcal{X}^2 - 2(A_x A_y + B_x B_y) \mathcal{X} \mathcal{Y} + (A_x^2 + B_x^2) \mathcal{Y}^2 = D^2\tag{137}$$

che è l'equazione di un'ellisse.

APPENDICE 5: POTENZIALI ELETTROMAGNETICI

Le onde piane sono soluzioni libere delle equazioni di Maxwell, ovvero sono campi elettromagnetici che possono esistere in tutto lo spazio anche in assenza di sorgenti. Tuttavia interessano anche (e soprattutto) le soluzioni forzate, ovvero le soluzioni prodotte da correnti elettriche (e magnetiche), in particolare da quelle impresse. Come abbiamo visto dal teorema di Poynting, infatti, sono tali correnti che forniscono potenza al campo e, in definitiva, possono produrlo.

Ci occuperemo principalmente del campo dovuto a correnti elettriche, rimandando a più avanti quello dovuto a correnti magnetiche¹.

Consideriamo allora delle correnti elettriche (impresse o indotte) \mathbf{J} in un mezzo equivalente al vuoto. Per semplicità considereremo anzi direttamente il vuoto, ma basterà introdurre i valori di ε e μ per ottenere, se necessario, i risultati validi nel caso di altri mezzi.

¹ Grazie alla sovrapposizione degli effetti, il campo di entrambe le correnti può essere calcolato come somma del campo delle sole correnti elettriche e di quello delle sole correnti magnetiche

Le equazioni di Maxwell da risolvere sono allora

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu_0\mathbf{H} \\
 \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{J} \\
 \nabla \cdot \varepsilon_0\mathbf{E} &= \rho \\
 \nabla \cdot \mu_0\mathbf{H} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{138}$$

Possiamo esprimere la soluzione generale di tali equazioni in termini di potenziali elettromagnetici.

Infatti, dalla quarta equazione delle (138) segue l'esistenza di una funzione vettoriale $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ tale che

$$\mu_0\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{139}$$

Sostituendo poi nella prima segue

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\nabla \times \mathbf{A} \\
 \nabla \times (\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}) &= 0
 \end{aligned}$$

e quindi il vettore $\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}$ è irrotazionale². Esiste quindi una funzione scalare $\phi(\mathbf{r})$ tale che

$$\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A} = -\nabla\phi \tag{140}$$

Qualunque campo dovuto a sorgenti solo elettriche (eventualmente nulle) può quindi essere espresso mediante i due potenziali \mathbf{A} e ϕ , detti **potenziale vettore** e **potenziale scalare**. Noti i potenziali, i campi si ottengono semplicemente per derivazione

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= -j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi \\
 \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}
 \end{aligned}
 \tag{141}$$

Notiamo subito che, per un dato campo, esistono più coppie di potenziali possibili. Siano \mathbf{A} e ϕ una coppia di potenziali per un certo campo. Poiché il rotore di un gradiente è nullo, allora anche

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$$

fornisce lo stesso campo magnetico di \mathbf{A} , **qualunque sia** la funzione scalare $\psi(\mathbf{r})$. Per ottenere lo stesso campo elettrico occorre modificare anche il potenziale vettore. Per ottenere che \mathbf{A}' e ϕ' , essendo ϕ' un potenziale scalare modificato, forniscano lo stesso campo elettrico dei potenziali originari \mathbf{A} e ϕ occorre imporre

$$-j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi = -j\omega\mathbf{A}' - \nabla\phi' = -j\omega(\mathbf{A} + \nabla\psi) - \nabla\phi'$$

e risolvendo

$$\begin{aligned}
 \nabla\phi' &= \nabla\phi - j\omega\nabla\psi \\
 \phi' &= \phi - j\omega\psi
 \end{aligned}$$

² Questa relazione è più generale di quella elettrostatica (\mathbf{E} è conservativo) e ad essa si riduce se $\omega = 0$

Quindi tutte le coppie di potenziali possibili sono date da

$$\begin{aligned}\mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\psi \\ \phi' &= \phi - j\omega\psi\end{aligned}\quad (142)$$

al variare della funzione arbitraria $\psi(\mathbf{r})$. Le (142) prendono il nome di trasformazioni di *gauge*, e mostrano che, almeno nella fisica classica, solo i campi, e non anche i potenziali, hanno realtà fisica. D'altra parte usare i potenziali fa guadagnare un grado di libertà (la scelta di ψ) che può essere utile per semplificare la soluzione dei problemi elettromagnetici.

Per ricavare i potenziali, possiamo utilizzare le due equazioni di Maxwell inomogenee, che non sono state ancora impiegate. Cominciamo a sostituire le (141) nella seconda delle (138). Ricordando che la permeabilità magnetica μ_0 è costante, e quindi può essere portata fuori dall'operatore ∇ , che è una derivata, si ha:

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \right) &= j\omega\varepsilon_0 (-j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi) + \mathbf{J} \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \omega^2\varepsilon_0\mathbf{A} - j\omega\varepsilon_0\nabla\phi + \mathbf{J} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \omega^2\varepsilon_0\mu_0\mathbf{A} - j\omega\varepsilon_0\mu_0\nabla\phi + \mu_0\mathbf{J}\end{aligned}$$

Ricordando che $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$, cambiando di segno e raccogliendo i termini, si ottiene infine

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{A} + \beta^2\mathbf{A} &= \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\varepsilon_0\mu_0\nabla\phi - \mu_0\mathbf{J} \\ &= \nabla\left[\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\varepsilon_0\mu_0\phi\right] - \mu_0\mathbf{J}\end{aligned}\quad (143)$$

essendo $\beta = \sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0}$ la costante di propagazione dello spazio libero. Analogamente dalla terza delle (138) segue

$$\nabla^2\phi = -j\omega\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\quad (144)$$

Le (143,144) sono le equazioni per i potenziali, ma sono equazioni accoppiate. Poiché però i potenziali possono essere variati secondo le (142) lasciando inalterati i campi (e le equazioni (143,144), ovviamente nei nuovi potenziali), cerchiamo, se esiste una nuova coppia di potenziali che conduce ad equazioni disaccoppiate. Una possibilità per disaccoppiare tali equazioni è di cercare se esiste un ψ a cui corrispondono dei potenziali \mathbf{A}' e ϕ' per cui l'espressione in parentesi quadra della (143) si annulli.

Imponiamo allora che

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + j\omega\varepsilon_0\mu_0\phi' = 0$$

Usando le trasformazioni di gauge segue

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \nabla\psi + j\omega\varepsilon_0\mu_0\phi + j\omega\varepsilon_0\mu_0(-j\omega\psi) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2\psi + j\omega\varepsilon_0\mu_0\phi + \beta^2\psi &= 0\end{aligned}$$

Quest'ultima è la cercata equazione per ψ

$$\nabla^2\psi + \beta^2\psi = -\nabla \cdot \mathbf{A} - j\omega\varepsilon_0\mu_0\phi$$

in cui a secondo membro c'è un termine noto. Poiché ψ fa variare i potenziali, ma non i campi, esso non richiede alcuna condizione al contorno e quindi l'equazione precedente ha sempre infinite soluzioni. Pertanto esisterà sempre una coppia di potenziali³ \mathbf{A} e ϕ per cui vale la *gauge di Lorentz*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\varepsilon_0\mu_0\phi = 0 \quad (145)$$

Sostituendo la (145) nella (143), e $\nabla \cdot \mathbf{A}$, ricavato dalla (145), nella (144), si ottengono le equazioni ai potenziali, nella gauge di Lorentz⁴

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} + \beta^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 \psi + \beta^2 \psi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (146)$$

Si noti che sia le tre componenti **cartesiane** di \mathbf{A} , sia ϕ , soddisfano alle stesse equazioni. Le (146) sono dette equazioni delle onde (o equazioni di *Helmholtz*).

Le (146) sono equazioni disaccoppiate, e quindi più semplici da risolvere. Inoltre la seconda delle (146) non è necessaria in quanto, noto \mathbf{A} , il potenziale scalare ϕ può essere ottenuto tramite derivate dalla gauge di Lorentz (145). Infatti in molti casi le relazioni tra campi e potenziali sono espresse direttamente in termini della sola \mathbf{A}

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -j\omega \mathbf{A} + \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\mu_0} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega \left[\mathbf{A} + \frac{1}{\beta^2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} \right] \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (147)$$

sostituendo ϕ dalla (145).

APPENDICE 6: POTENZIALE VETTORE DI UN DIPOLO ELEMENTARE

L'equazione d'onda (146) per il potenziale vettore di un dipolo elementare posto nell'origine può essere scritta come

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \beta^2 \mathbf{A} = -\mu_0 I \Delta z \delta(\mathbf{r}) \mathbf{i}_z$$

ed è una equazione inomogenea. Conviene cominciare a cercare una soluzione della equazione completa, che dipenda direttamente da \mathbf{J}_D . Poiché l'operatore ∇^2 è un operatore *scalare*, esprimendo \mathbf{A} in componenti cartesiane, segue

$$\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A_x) \mathbf{i}_x + (\nabla^2 A_y) \mathbf{i}_y + (\nabla^2 A_z) \mathbf{i}_z$$

³ In realtà, per quanto detto prima, queste coppie sono infinite

⁴ In modo analogo si può dimostrare che esistono potenziali che soddisfano la gauge di Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, che conduce a equazioni parzialmente disaccoppiate, e, se $\rho = 0$, potenziali che soddisfano alla gauge $\phi = 0$

e quindi esiste un integrale particolare che ha solo componente z . L'equazione d'onda diventa quindi

$$\nabla^2 A_z + \beta^2 A_z = -\mu_0 I \Delta z \delta(\mathbf{r}) \quad (148)$$

e avrà, per la simmetria del termine noto, una soluzione funzione solo di $r = |\mathbf{r}|$. Tenendo conto di questo, possiamo sviluppare il ∇^2 ottenendo

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dA_z}{dr} \right] + \beta^2 A_z = -\mu_0 I \Delta z \delta(\mathbf{r}) \quad (149)$$

Introduciamo una nuova incognita A_0 , dipendente solo da r , definita da $rA_z = A_0$. Derivando quest'ultima si ha

$$A_z + r \frac{dA_z}{dr} = \frac{dA_0}{dr} \quad \Longrightarrow \quad A_0 + r^2 \frac{dA_z}{dr} = r \frac{dA_0}{dr}$$

Derivando ancora quest'ultima espressione segue

$$\frac{dA_0}{dr} + \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dA_z}{dr} \right] = \frac{dA_0}{dr} + r \frac{d^2 A_0}{dr^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dA_z}{dr} \right] = r \frac{d^2 A_0}{dr^2}$$

Sostituiamo nella (149)

$$\frac{1}{r^2} r \frac{d^2 A_0}{dr^2} + \beta^2 \frac{A_0}{r} = -\mu_0 I \Delta z \delta(\mathbf{r})$$

ovvero

$$\frac{1}{r} \left[\frac{d^2 A_0}{dr^2} + \beta^2 A_0 \right] = -\mu_0 I \Delta z \delta(\mathbf{r}) \quad (150)$$

Per $r \neq 0$ la (150) è una equazione omogenea, ed ha come soluzione

$$A_0(r) = B e^{-j\beta r} + C e^{j\beta r} \quad \Longrightarrow \quad A_z(r) = B \frac{e^{-j\beta r}}{r} + C \frac{e^{j\beta r}}{r} \quad (151)$$

I due termini della (18) sono due onde (confronta il paragrafo sulla propagazione di onde piane) che viaggiano in direzione radiale, il primo verso $r = +\infty$ e il secondo invece da $r = +\infty$ verso $r = 0$. Quindi il primo termine è prodotto da sorgenti al finito, mentre il secondo può solo essere prodotto da sorgenti poste all'infinito. Poiché l'unica sorgente è posta in $r = 0$, occorre prendere $C = 0$.

Il valore di B dipende invece dalla ampiezza del dipolo. Per calcolarlo sostituiamo $A_z(r)$ nella equazione (148). Risulta

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_z &= B \nabla^2 \left[e^{-j\beta r} \frac{1}{r} \right] = B \left[\frac{1}{r} \nabla^2 e^{-j\beta r} + 2 \nabla e^{-j\beta r} \cdot \nabla \frac{1}{r} + e^{-j\beta r} \nabla^2 \frac{1}{r} \right] \\ &= B \left[\frac{1}{r} \nabla^2 e^{-j\beta r} + 2 \nabla e^{-j\beta r} \cdot \nabla \frac{1}{r} - 4\pi e^{-j\beta r} \delta(\mathbf{r}) \right] \end{aligned}$$

per le proprietà della delta spaziale di Dirac (vedi App. 1). Ovviamente, sempre per queste proprietà, il termine esponenziale va calcolato in $r = 0$ e vale quindi 1. I primi due termini, regolari, compensano $\beta^2 A_z$ e quindi segue, sostituendo nella (148),

$$-4B\pi\delta(\mathbf{r}) = -\mu_0 I \Delta z \delta(\mathbf{r}) \quad \implies \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \Delta z \quad (152)$$

Il potenziale vettore dipendente dal dipolo é quindi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \Delta z \frac{e^{-j\beta r}}{r} \mathbf{i}_z \quad (153)$$

Nella (153), r è la distanza tra il *punto campo*, dove si richiede il potenziale vettore, e il *punto sorgente*, dove è il dipolo (finora posto in $\mathbf{r} = 0$). Se il dipolo è posto in \mathbf{r}_D , il potenziale vettore è ancora dato da (153), ma $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_D|$.

A partire dalla (153), si può poi calcolare il campo per derivazione, usando le (147).

La (153) fornisce una ulteriore informazione importante: il potenziale vettore del dipolo è allineato col dipolo stesso. Quindi il potenziale vettore, in un dato punto, è sempre proporzionale, mediante una funzione scalare detta *funzione di Green* (o risposta impulsiva), all'ampiezza del dipolo:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-j\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}_D|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_D|} \left[I \Delta z \mathbf{i}_z \right] = g(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_D|) \left[I \Delta z \mathbf{i}_z \right]$$

essendo

$$g(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_D|) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-j\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}_D|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_D|}$$

la funzione di Green.

INDICE

1. EQUAZIONI DI MAXWELL	1
2. CONTINUITÀ DEI CAMPI	4
3. EQUAZIONI DI MAXWELL IN FORMA DIFFERENZIALE	6
4. FORZA DI LORENTZ E POTENZA	8
5. RELAZIONI COSTITUTIVE	9
6. PROPRIETÀ STRUTTURALI	10
7. PROPRIETÀ DI SIMMETRIA	12
8. RAPPRESENTAZIONE DEI SEGNALI SINUSOIDALI	16
9. DOMINIO DELLA FREQUENZA	19
10. EQUAZIONI DI MAXWELL NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA	20
11. TEOREMA DI POYNTING	22
12. DIPOLO ELEMENTARE	27
13. CAMPO DI UN DIPOLO ELEMENTARE NEL VUOTO	28
14. CAMPO LONTANO	30
15. PROPAGAZIONE	31
16. DIPOLO CORTO	33
17. POTENZA IRRADIATA DA UN DIPOLO	35
18. ANDAMENTO DEL CAMPO DI UN DIPOLO CORTO	38
19. MEZZI DISPERSIVI – MODELLO DI DEBYE	40
20. VETTORI COMPLESSI – POLARIZZAZIONE	46
21. DETERMINAZIONE DELLE CONDIZIONI DI POLARIZZAZIONE LINEARE E CIRCOLARE	48
22. RAPPORTO ASSIALE E CONDIZIONI DI POLARIZZAZIONE LINEARE E CIRCOLARE IN TERMINI DI COMPONENTI	49
App. 1. DISTRIBUZIONI TRIDIMENSIONALI	52
App. 2. EQUAZIONI DI MAXWELL E PRINCIPI DI KIRCHHOFF	52
App. 3. DISSIPAZIONE NEL MODELLO DI DEBYE	54
App. 4. DIMOSTRAZIONE CHE $\mathbf{e}(t)$ DESCRIVE UN ELLISSE	54
App. 5. POTENZIALI ELETTRROMAGNETICI	55
App. 6. POTENZIALE VETTORE DI UN DIPOLO ELEMENTARE	58