

# ESERCIZI DI GEOMETRIA E ALGEBRA

## PREMESSA

In questo file abbiamo raccolto vari esercizi, con relativa soluzione, attinenti al corso di geometria e algebra. Lo Studente è invitato a svolgere autonomamente gli esercizi; solo in una seconda fase dovrà confrontare criticamente ciò che ha elaborato con la soluzione proposta.

Si sottolinea inoltre l'importanza di affrontare ogni problema con attenzione, sfruttando sempre tutte le conoscenze matematiche a propria disposizione e, quando possibile, utilizzando diverse strategie risolutive: in queste situazioni è molto utile controllare la coerenza dei risultati ottenuti.

Gli esercizi col simbolo (\*) sono leggermente più complessi e possono essere tralasciati nella prima fase di studio.

È gradita la segnalazione di eventuali errori.

Cagliari, 2 dicembre 2015

Andrea Ratto

## ESERCIZI DI GEOMETRIA E ALGEBRA

### 1. ARGOMENTI PRELIMINARI: ESERCIZI PROPOSTI

**Esercizio 1.1.** Calcolare la somma dei primi  $n$  numeri dispari.

**Esercizio 1.2.** Calcolare la somma dei primi  $n$  numeri pari.

**Esercizio 1.3.** (\*) Calcolare

$$\sum_{k=0}^n k^2 .$$

**Esercizio 1.4.** (\*) Sia  $p$  un numero primo. Dimostrare che  $\sqrt{p}$  è irrazionale.

**Esercizio 1.5.** Siano  $r : y = 2x + 1$  e  $P = [-2, 2]$ .

- Rappresentare graficamente  $r$  e  $P$  nel piano cartesiano.
- Determinare la proiezione ortogonale  $Q$  di  $P$  su  $r$ .
- Calcolare  $\text{dist}(P, r)$ .
- Scrivere l'equazione della circonferenza  $\gamma$  di centro  $P$  e tangente a  $r$ .
- Determinare il punto  $P'$  simmetrico di  $P$  rispetto a  $r$ .

**Esercizio 1.6.** Determinare per quali valori di  $b \in \mathbb{R}$  la retta  $r$  di equazione  $y = b$  risulta secante, tangente o esterna alla circonferenza  $\gamma$  di equazione  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ .

**Esercizio 1.7.** Sia  $\gamma$  come nell'Esercizio 1.6 e sia  $P = [2, 2]$ . Determinare l'equazione delle due rette  $r_1$  e  $r_2$  che passano per  $P$  e sono tangenti a  $\gamma$ .

**Esercizio 1.8.** Disegnare il grafico di  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = |x - 1| - |x| \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

**Esercizio 1.9.** Sia  $P = [2, 4]$ . Si consideri la parabola  $\gamma$  di equazione  $y = x^2 + x - 2$ . Dopo aver disegnato  $\gamma$  e verificato che  $P \in \gamma$ , calcolare l'equazione della retta  $r$  tangente a  $\gamma$  in  $P$ .

**Esercizio 1.10.** Rappresentare graficamente il seguente sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  :

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, -2x \leq y \leq x + 1\} .$$

**Esercizio 1.11.** Rappresentare graficamente il seguente sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  :

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 + x^2 \leq y \leq -x + 3\} .$$

**Esercizio 1.12.** (a) Determinare per quali  $x \in \mathbb{R}$  è soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 1} > 0 .$$

(b) Determinare per quali  $x \in \mathbb{R}$  è soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$|x + 2| \leq 3 .$$

**Esercizio 1.13.** Sia  $C = [2, -1]$ . Scrivere l'equazione della circonferenza  $\gamma$  che ha centro in  $C$  ed è tangente alla retta  $r$  di equazione  $y + x = 0$ .

**Esercizio 1.14.** (a) Determinare per quali  $x \in \mathbb{R}$  è soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} \geq 2 .$$

(b) Determinare per quali  $x \in \mathbb{R}$  è soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$|x + 5| \leq 2x - 2 .$$

- (c) (\*) Determinare per quali  $x \in \mathbb{R}$  è soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$|x| + x + 5 \leq |2x - 1| .$$

**Esercizio 1.15.** Determinare quale relazione devono soddisfare  $m, b \in \mathbb{R}$  affinché la retta  $y = mx + b$  risulti tangente alla circonferenza con centro nell'origine e raggio  $R = 1$ .

**Esercizio 1.16.** Siano  $P(x) = x^4 - 3x^3 - 2x + 1$ ,  $P'(x) = x^2 + x - 2$ . Scrivere il loro quoziente

$$T(x) = \frac{P(x)}{P'(x)}$$

nella forma

$$T(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{P'(x)} ,$$

dove  $Q(x)$  e  $R(x)$  sono rispettivamente il quoziente ed il resto della divisione dei due polinomi di partenza.

**Esercizio 1.17.** Scomporre i seguenti polinomi nel prodotto di fattori irriducibili:

- (a)  $x^4 + 1$ .
- (b)  $x^3 + 2x - 3$ .
- (c)  $x^3 - 2x - 1$ .
- (d)  $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ .
- (e)  $x^6 - 1$ .

**Esercizio 1.18.** Sia  $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ .

- (a) Calcolare la molteplicità algebrica  $m_a(x_0)$  di  $x_0 = 1$ .
- (b) Stabilire per quali  $x \in \mathbb{R}$  si ha  $P(x) < 0$ .

**Esercizio 1.19.** Determinare per quali  $x \in \mathbb{R}$  si ha

$$\sqrt{4x + 1} = -2x .$$

**Esercizio 1.20.** Siano  $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$  e  $x_0 = 1$ . Calcolare  $m_a(x_0)$  e scrivere  $P(x)$  come prodotto di fattori irriducibili.

**Esercizio 1.21.** Disegnare le seguenti coniche:

(a)

$$\gamma_1 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 .$$

(b)

$$\gamma_2 : \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 .$$

(c)

$$\gamma_3 : \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1 .$$

(d)

$$\gamma_4 : \frac{(x-1)^2}{4} - (y+1)^2 = 1 .$$

**Esercizio 1.22.** (\*) Siano  $\gamma_1$  come nell'Esercizio 1.21 e  $P = [5, 0]$ . Determinare le due rette tangenti a  $\gamma_1$  che passano per  $P$ .

**Esercizio 1.23.** (\*) Si considerino una generica retta

$$r : ax + by + c = 0$$

e un generico punto  $P_0 = [x_0, y_0]$ . Dimostrare la seguente formula:

$$(1.1) \quad \text{dist}(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

**Esercizio 1.24.** (\*) Siano  $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ . Definire una funzione **bigettiva**  $f : A \rightarrow B$ .

## 2. ARGOMENTI PRELIMINARI: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

**Soluzione dell'Es. 1.1:** Sappiamo (si veda il file conoscenze-preliminari) che:

$$\sum_{k=0}^{(n-1)} k = \frac{n(n-1)}{2} .$$

Ora, rispondere alla domanda equivale al calcolo seguente:

$$\sum_{k=0}^{(n-1)} (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^{(n-1)} k + \sum_{k=0}^{(n-1)} 1 = 2 \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2 .$$

Alternativamente, lo Studente, dopo aver empiricamente intuito il risultato precedente, deve essere in grado di dimostrarlo direttamente usando il *principio di induzione*.

**Soluzione dell'Es. 1.2:** (Notare che 0 è pari ..)

$$\sum_{k=0}^{(n-1)} 2k = n(n-1) .$$

**Soluzione dell'Es. 1.3:** Si dimostra, usando il principio di induzione, che

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

**Soluzione dell'Es. 1.4:** Si ragiona per assurdo, ipotizzando

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n} ,$$

con  $m, n$  interi positivi, primi tra loro e con  $n \neq 0$ . Elevando al quadrato si ottiene

$$(2.1) \quad pm^2 = n^2 .$$

Da ciò si ricava che  $p$  compare nella fattorizzazione di  $n$  e, quindi (pensarci!) anche in quella di  $m$ . Questo contraddice l'ipotesi che  $m, n$  fossero primi tra loro. Segnaliamo, per completezza, che, più generalmente, si può dimostrare che  $\sqrt{p}$  è irrazionale se  $p$  non è un quadrato perfetto (dimostrazione data per la prima volta dal celebre matematico Dedekind).

**Soluzione dell'Es. 1.5:**

- (a) Per disegnare  $r$  è sufficiente osservare che contiene i punti di coordinate  $[0, 1]$  e  $[-(1/2), 0]$ .
- (b)  $Q$  si ottiene determinando l'intersezione tra  $r$  e  $r'$ , dove  $r'$  è la retta che passa per  $P$  ed è perpendicolare a  $r$ . In formule,  $Q$  si

ricava come soluzione del semplice sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -(1/2)x + 1 \end{cases} .$$

Quindi  $Q = [0, 1]$ .

(c)  $\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q) = \sqrt{5}$ . Alternativamente, per rispondere a questa domanda, si poteva usare la formula data nell'Esercizio 1.23 sotto.

(d)

$$\gamma : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 5 .$$

(e) Si impone che  $Q$  sia il punto medio del segmento  $\overline{PP'}$ . Si trova  $P' = [2, 0]$ .

**Soluzione dell'Es. 1.6:**  $\gamma$  ha raggio  $R = 1$  e centro nel punto  $C = [1, 0]$ . La retta  $r$  risulta:

- secante se  $|b| < 1$  ;
- tangente se  $|b| = 1$  ;
- esterna se  $|b| > 1$ .

**Soluzione dell'Es. 1.7:** Si può osservare preliminarmente che la retta verticale  $r_1 : x = 2$  è una delle due tangenti richieste. Per determinare  $r_2$  si procede algebricamente determinando il valore di  $m \in \mathbb{R}$  per cui il sistema

$$(2.2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = m(x - 2) + 2 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione (il sistema (2.2) geometricamente rappresenta l'intersezione tra  $\gamma$  e la generica retta, non verticale, passante per  $P$ ). Si ricava  $m = (3/4)$ , per cui

$$r_2 : y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} .$$

Il lettore è invitato a trovare metodi geometrici alternativi per pervenire al risultato precedente.

**Soluzione dell'Es. 1.8:** È facile realizzare il grafico se si calcola preliminarmente, utilizzando semplicemente la definizione della funzione valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \geq 1 ; \\ 1 - 2x & \text{se } 0 \leq x < 1 ; \\ 1 & \text{se } x < 0 . \end{cases}$$

**Soluzione dell'Es. 1.9:** La parabola ha concavità verso l'alto, vertice nel punto  $V = [-(1/2), -(9/4)]$ , interseca l'asse  $y$  in  $[0, -2]$  e l'asse  $x$  nei due punti di ascissa rispettivamente 1 e  $-2$ . L'appartenenza di  $P$  a  $\gamma$  si verifica facilmente controllando che le coordinate di  $P$  soddisfino l'equazione di  $\gamma$ :

$$4 = 2^2 + 2 - 2 \quad \text{OK} .$$

Per trovare la tangente a  $\gamma$  in  $P$  bisogna imporre che il sistema

$$(2.3) \quad \begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = m(x - 2) + 4 \end{cases}$$

ammetta un'unica soluzione (il sistema (2.3) geometricamente rappresenta l'intersezione tra  $\gamma$  e la generica retta, non verticale, passante per  $P$ ). Si ricava  $m = 5$ , per cui

$$r : y = 5x - 6 .$$

Si noti che, posto  $f(x) = x^2 + x - 2$ , si ha  $m = f'(2)$ , come imparato attraverso il corso di analisi matematica 1.

**Soluzione dell'Es. 1.10:** L'insieme  $A$  si trova tra le due rette verticali  $x = 1$  e  $x = 3$ , nella regione al di sopra della retta  $y = -2x$  e al di sotto della retta  $y = x + 1$ .

**Soluzione dell'Es. 1.11:** Si ragiona in modo simile all'esercizio precedente..

**Soluzione dell'Es. 1.12:**

- (a)  $x < -2$  oppure  $x > 3$ .
- (b)  $-5 \leq x \leq 1$ .

**Soluzione dell'Es. 1.13:** Il raggio  $R$  coincide con la distanza tra  $C$  e la retta  $r$ . Si arriva a:

$$\gamma : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{2} ,$$

in quanto  $R = (1/\sqrt{2})$ .

**Soluzione dell'Es. 1.14:**

- (a)  $-1 < x \leq -(1/\sqrt{2})$  oppure  $0 < x \leq (1/\sqrt{2})$ .
- (b)  $x \geq 7$ .
- (c)  $x \leq -2$ .



**Soluzione dell'Es. 1.15:** La condizione richiesta è

$$m^2 = b^2 - 1 .$$

Si noti che è quindi necessario che  $|b| \geq 1$ , fatto **geometricamente ovvio**.

**Soluzione dell'Es. 1.16:**

$$Q(x) = x^2 - 4x + 6 , \quad R(x) = -16x + 13 .$$

**Soluzione dell'Es. 1.17:**

(a)  $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ .

(b)  $x^3 + 2x - 3 = (x - 1)(x^2 + x + 3)$ .

(c)

$$x^3 - 2x - 1 = (x + 1) \left( x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left( x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) .$$

(d)  $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)(x^2 + 1)$ .

(e)  $x^6 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ .

**Soluzione dell'Es. 1.18:** Si può usare la fattorizzazione determinata nell'Es. 1.17(d), da cui si deduce subito che  $m_a(x_0) = 1$  e  $P(x) < 0$  se e solo se  $-2 < x < 1$ .

**Soluzione dell'Es. 1.19:** Abbiamo un'unica soluzione:

$$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

**Soluzione dell'Es. 1.20:**

$$P(x) = (x - 1)^2 (x^2 + 1)$$

e quindi  $m_a(x_0) = 2$ .

**Soluzione dell'Es. 1.21:** I disegni si realizzano partendo dalle seguenti osservazioni:

- (a)  $\gamma_1$  è un'ellisse con centro nell'origine, semiasse orizzontale di lunghezza  $a = 2$  e semiasse verticale  $b = 1$ .

- (b)  $\gamma_2$  è un'iperbole con centro nell'origine e asintoti di equazione  $y = \pm(1/2)x$ . Si può notare che i vertici dei due rami sono posti sull'asse  $x$ , nei punti di ascissa  $\pm 2$ .
- (c)  $\gamma_3$  è un'ellisse con centro in  $C = [1, 0]$ , semiasse orizzontale  $a = 2$  e semiasse verticale  $b = 1$ .
- (d)  $\gamma_4$  è un'iperbole con centro in  $C = [1, -1]$  e asintoti di equazione

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} .$$

I vertici dei due rami si trovano sulla retta orizzontale  $y = -1$  ed hanno coordinate  $[-1, 1]$  e  $[3, 1]$ .

**Soluzione dell'Es. 1.22:** Le due tangenti richieste hanno equazione del tipo  $y = m(x - 5)$ . Si trova

$$m = \pm \frac{\sqrt{6}}{12} .$$

**Soluzione dell'Es. 1.23:** Questo esercizio è interamente svolto nel file `conoscenze-preliminari.pdf`. Alternativamente, si suggerisce al Lettore di cercare di svolgere autonomamente questo esercizio **dopo** aver studiato la teoria dei vettori, utilizzando in particolare il concetto di rappresentazione parametrica di una retta parallela ad un dato vettore.

**Soluzione dell'Es. 1.24:** **Ad esempio**, si può definire la funzione bigettiva richiesta nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{se } x = \frac{1}{n} \quad (n \geq 1) \\ x & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{n} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

## 3. VETTORI E GEOMETRIA ANALITICA: ESERCIZI PROPOSTI

**Esercizio 3.1.** Siano  $\vec{u} = [2, 1, 0]$ ,  $\vec{v} = [-1, 3, 1]$ ,  $\theta = \widehat{\vec{u}\vec{v}}$ .

- Determinare  $\cos \theta$ .
- Calcolare l'area  $A$  del parallelogramma individuato da  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .
- Calcolare il volume  $V$  del parallelepipedo individuato da  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{k}$ .
- Calcolare  $\text{vers}(\vec{v})$ .
- Determinare il vettore  $\vec{w}$  proiezione di  $\vec{u}$  lungo  $\vec{v}$ .
- Calcolare  $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$ . Verificare che il risultato ottenuto coincide con  $\vec{v} \wedge \vec{u}$ . Perché?

**Esercizio 3.2.** In  $\mathbb{R}^2$ , siano  $r$  la retta di equazione  $y = 2x$  e  $\vec{v} = [1, 3]$ .

- Determinare due versori  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2$  tali che  $\vec{w}_1 \parallel r$  e  $\vec{w}_2 \perp r$ .
- Scrivere  $\vec{v} = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2$  per opportuni  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.3.** (\*) In  $\mathbb{R}^3$ , sia  $\vec{v} = [1, 2, 1]$ .

- Determinare tutti i versori perpendicolari a  $\vec{v}$ .
- Usare (a) per scrivere la circonferenza  $\gamma$ , di centro O, raggio 1 e contenuta nel piano perpendicolare a  $\vec{v}$ , come sistema formato da un'equazione di primo grado (piano) e da un'equazione di secondo grado (sfera).
- Ragionare su come parametrizzare  $\gamma$ .

**Esercizio 3.4.** Siano  $P_0 = [1, 1, 1]$ ,  $P_1 = [0, 2, 3]$  e  $P_2 = [0, -1, 0]$ .

- Verificare che  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  non sono allineati.
- Dare una rappresentazione parametrica del piano  $\pi$  che contiene  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$ .
- Determinare l'equazione del piano  $\pi$ .

**Esercizio 3.5.** Siano  $P_1 = [1, 0, 3]$ ,  $P_2 = [0, 1, 1]$  e  $P_3 = [1, 3, 7]$ .

- Determinare l'equazione del piano  $\pi$  asse del segmento  $\overline{P_2 P_3}$ .
- Determinare l'equazione del piano  $\pi'$  asse del segmento  $\overline{P_1 P_2}$ .
- (\*) Descrivere la famiglia di sfere che contengono  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ .

**Esercizio 3.6.** Siano  $P = [1, 1, 1]$  e

$$(3.1) \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Calcolare  $\text{dist}(P, r)$ .

**Esercizio 3.7.** Siano  $P_0$  e  $r$  rispettivamente il punto di coordinate  $[1, 1, 0]$  e la retta di equazione

$$(3.2) \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} .$$

- (a) Calcolare  $\text{dist}(P_0, r)$  ;
- (b) Scrivere l'equazione del piano  $\Pi$  che contiene  $P_0$  e l'asse  $z$  ;
- (c) Scrivere l'equazione del piano  $\Pi'$  che contiene  $P_0$  e l'asse  $y$ .

**Esercizio 3.8.** Siano  $P_0$  e  $r$  rispettivamente il punto di coordinate  $[2, 1, 2]$  e la retta di equazione

$$(3.3) \quad \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} .$$

- (a) Calcolare  $\text{dist}(P_0, r)$ .
- (b) Scrivere l'equazione del piano  $\Pi$  che contiene  $P_0$  e la retta  $r$ .
- (c) Scrivere l'equazione di una sfera  $S$  avente centro su  $r$  e passante per l'origine  $O$ .

**Esercizio 3.9.** Sia  $r$  la retta in  $\mathbb{R}^3$  di equazione:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2z = 0 \end{cases} .$$

Determinare l'equazione del piano  $\Pi$  che contiene  $r$  e l'origine.

**Esercizio 3.10.** Siano

$$\vec{u} = [1, 1, 0] , \quad \vec{v} = [0, 2, 0] , \quad \vec{w} = [0, 1, 1] .$$

- (a) Calcolare  $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$ .
- (b) Determinare la retta  $r$  che passa per il punto  $P_1 = [1, 1, 4]$  ed è parallela a  $\vec{w}$  (descrivere  $r$  sia in forma parametrica, sia attraverso un sistema lineare).

- (c) Determinare l'equazione del piano  $\Pi_1$  che passa per l'origine e contiene la retta  $r$  determinata al punto (b).
- (d) Determinare l'equazione del piano  $\Pi_2$  che passa per  $P_2 = [4, 1, 0]$  ed è parallelo agli assi  $x$  e  $z$ .
- (e) Scrivere l'equazione del piano  $\Pi_3$  che passa per l'origine ed è parallelo a  $\vec{u}$  e  $(\vec{u} + \vec{w})$ .

**Esercizio 3.11.** Siano  $P_0$  e  $r$  rispettivamente il punto di coordinate  $[1, 1, 0]$  e la retta di equazione

$$(3.4) \quad \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} .$$

Calcolare  $\text{dist}(P_0, r)$ .

**Esercizio 3.12.** Siano  $P_0$  e  $r$  rispettivamente il punto di coordinate  $[1, 0, 1]$  e la retta di equazione

$$(3.5) \quad \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} .$$

Calcolare  $\text{dist}(P_0, r)$ .

**Esercizio 3.13.** Siano  $r_1$  e  $r_2$  le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} , t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} .$$

- (1) Calcolare  $\text{dist}(r_2, O)$ .
- (2) Determinare l'equazione del piano  $\pi$  che contiene l'origine  $O$  e la retta  $r_1$ ; dare una rappresentazione parametrica di  $\pi$ .
- (3) Determinare la comune perpendicolare  $r$  a  $r_1$  e  $r_2$ .
- (4) Scrivere un sistema di equazioni che descrive la retta  $r'$  che passa per l'origine  $O$  ed è parallela a  $r_1$ .

**Esercizio 3.14.** Siano  $r_1$  e  $r_2$  le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} , t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} .$$

- (1) Calcolare  $\text{dist}(r_2, O)$ .
- (2) Determinare l'equazione del piano  $\pi$  che contiene l'origine  $O$  e la retta  $r_1$ ; dare una rappresentazione parametrica di  $\pi$ .
- (3) Determinare la comune perpendicolare  $r$  a  $r_1$  e  $r_2$ .
- (4) Scrivere un sistema di equazioni che descrive la retta  $r'$  che passa per l'origine  $O$  ed è parallela a  $r_1$ .

**Esercizio 3.15.** Siano

$$r_1 : \begin{cases} x - 3 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}.$$

- (a) Determinare la comune perpendicolare  $r$  a  $r_1$  e  $r_2$ , precisando le coordinate dei punti  $Q_i = r \cap r_i$ ,  $i = 1, 2$ .
- (b) Scrivere l'equazione della retta  $r_1^*$  che passa per l'origine ed è parallela a  $r_1$ .

**Esercizio 3.16.** Siano  $P_0$  e  $r$  rispettivamente il punto di coordinate  $[1, 0, 1]$  e la retta di equazione

$$(3.6) \quad \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}.$$

Calcolare  $\text{dist}(P_0, r)$ .

**Esercizio 3.17.** Siano  $P = [1, 0, 1]$  e  $\Pi : x - 2y + z - 1 = 0$ .

- (a) Calcolare  $\text{dist}(P, \Pi)$ .
- (b) Determinare l'equazione della sfera  $S$  che ha centro in  $P$  ed è tangente a  $\Pi$ .
- (c) Determinare il punto  $P'$  simmetrico di  $P$  rispetto a  $\Pi$ .

**Esercizio 3.18.** (\*) Si considerino le rette  $r_1$  e  $r_2$  di equazione rispettivamente:

$$r_1 : \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}; \quad r_2 : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Determinare l'equazione della comune perpendicolare  $r$  a  $r_1$  e  $r_2$ .

#### 4. VETTORI E GEOMETRIA ANALITICA: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

**Soluzione dell'Es. 3.1:**

- (a)  $\cos \theta = 1/\sqrt{55}$ .

(b)  $A = 3\sqrt{6}$ .

(c)  $V = 7$ .

(d)

$$\text{vers}(\vec{v}) = \left[ -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right] .$$

(e)

$$\vec{w} = \left[ -\frac{1}{11}, \frac{3}{11}, \frac{1}{11} \right] .$$

(f)

$$\begin{aligned} (3\vec{u} - 2\vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) &= 3(\vec{u} \wedge \vec{u}) - 2(\vec{v} \wedge \vec{u}) - 3(\vec{u} \wedge \vec{v}) + 2(\vec{v} \wedge \vec{v}) \\ &= -2(\vec{v} \wedge \vec{u}) + 3(\vec{v} \wedge \vec{u}) = \vec{v} \wedge \vec{u} = [-1, 2, -7] . \end{aligned}$$

**Soluzione dell'Es. 3.2:**

(a) Ad esempio:

$$\vec{w}_1 = \left[ \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right] , \quad \vec{w}_2 = \left[ -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right] .$$

(b)  $\lambda_1 = (7/\sqrt{5}), \lambda_2 = (1/\sqrt{5})$ .

**Soluzione dell'Es. 3.3:** (a) Si tratta di descrivere i versori che appartengono al piano di equazione  $x + 2y + z = 0$ . Due di essi, **ortogonali fra loro**, sono

$$\vec{w}_1 = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right] , \quad \vec{w}_2 = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right] .$$

Quindi la famiglia di versori richiesta è descritta da:

(4.1) 
$$\vec{v}_t = \cos t \vec{w}_1 + \sin t \vec{w}_2 , \quad 0 \leq t \leq 2\pi .$$

(b)

$$\gamma : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} .$$

(c) In pratica, la parametrizzazione della circonferenza  $\gamma$  è stata data in (a):

$$\gamma(t) = \cos t \vec{w}_1 + \sin t \vec{w}_2 , \quad 0 \leq t \leq 2\pi .$$

Si consiglia di riesaminare questo esercizio alla fine del corso.

**Soluzione dell'Es. 3.4:**

(a) Possiamo calcolare

$$(4.2) \quad \vec{w} = \overrightarrow{(P_1 - P_0)} \wedge \overrightarrow{(P_2 - P_0)} = [-1, 1, 2] \wedge [-1, -2, -1] = [3, -3, 3].$$

Poiché  $\vec{w} \neq \vec{0}$  la verifica richiesta è completa.(b) Il piano  $\pi$  passa per  $P_0$  ed è parallelo a  $\overrightarrow{(P_1 - P_0)}$  e  $\overrightarrow{(P_2 - P_0)}$ . Quindi una sua rappresentazione parametrica è, ad esempio,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - s - t \\ y = 1 + s - 2t \\ z = 1 + 2s - t \end{cases}, \quad \text{dove } s, t \in \mathbb{R}.$$

(c) Il piano  $\pi$  passa per  $P_0$  ed è perpendicolare al vettore  $\vec{w}$  calcolato in (4.2). Quindi

$$\pi : x - y + z - 1 = 0.$$

**Soluzione dell'Es. 3.5:** (a) Il piano asse di un segmento è quel piano che passa per il punto medio di tale segmento ed è ortogonale al segmento stesso. Può, alternativamente, essere caratterizzato come il luogo di punti equidistanti rispetto agli estremi del segmento. Imponendo questa definizione si arriva a:

$$(4.3) \quad \pi : 2x + 4y + 12z - 57 = 0.$$

(b) In modo analogo si perviene a:

$$(4.4) \quad \pi' : x - y + 2z - 4 = 0.$$

(c) Il centro di ognuna delle sfere di questa famiglia si deve trovare sulla retta  $r = \pi \cap \pi'$ , una cui rappresentazione parametrica è:

$$(4.5) \quad r : \begin{cases} x = (73/6) + 10t \\ y = (49/6) + 4t \\ z = -3t \end{cases}, \quad \text{dove } t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto la famiglia di sfere  $S_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , che contengono i tre punti dati è caratterizzata dall'aver centro su  $r$  e raggio pari alla distanza tra il centro ed uno qualunque dei tre punti (ad esempio,  $P_2$ ):

$$S_t : \left(x - \frac{73}{6} - 10t\right)^2 + \left(y - \frac{49}{6} - 4t\right)^2 + (z + 3t)^2 = R_t^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

dove

$$R_t = \sqrt{\left(\frac{73}{6} + 10t\right)^2 + \left(\frac{49}{6} + 4t - 1\right)^2 + (-3t - 1)^2}.$$



**Soluzione dell'Es. 3.6:** Si può procedere in vari modi. Ad esempio, si può osservare che

$$(4.6) \quad \text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q) ,$$

dove  $Q$  è la proiezione ortogonale di  $P$  su  $r$ , cioè l'intersezione di  $r$  con il piano  $\Pi$  che passa per  $P$  ed è perpendicolare a  $r$ . Dato che una rappresentazione parametrica di  $r$  è

$$(4.7) \quad \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t - 1 \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

vediamo che un vettore direzionale di  $\Pi$  è  $[1, -1, 1]$ , per cui la sua equazione è:

$$(4.8) \quad \Pi : \quad x - y + z - 1 = 0 .$$

Usando (4.7) in (4.8) si trova facilmente  $t = (2/3)$  e quindi

$$(4.9) \quad Q = \left[ \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right] .$$

Infine, utilizzando (4.9) in (4.6), si arriva al risultato finale:

$$(4.10) \quad \text{dist}(P, r) = \frac{\sqrt{42}}{3} .$$

Un procedimento alternativo consiste nell'utilizzare la formula che ora descriviamo. Siano  $P_1$  un qualunque punto di  $r$  e  $\vec{v}_r$  un versore parallelo a  $r$ . Allora

$$(4.11) \quad \text{dist}(P, r) = \left| \overrightarrow{(P - P_1)} \wedge \vec{v}_r \right| .$$

Per capire la validità della formula (4.11) è sufficiente osservare preliminarmente che la quantità a destra dell'uguale è l'area del parallelogramma individuato da  $\overrightarrow{(P - P_1)}$  e  $\vec{v}_r$ . Ma, considerando  $\vec{v}_r$  come base (**di lunghezza pari a 1**) di tale parallelogramma, possiamo concludere che questa quantità rappresenta anche l'**altezza**  $h$  del parallelogramma relativamente alla base  $\vec{v}_r$ . Ma, per costruzione del parallelogramma, questa altezza  $h$  coincide con  $\text{dist}(P, r)$ .

Ora ricaviamo da (4.7) i dati necessari per applicare la (4.11):

$$(4.12) \quad P_1 = [0, 0, -1] , \quad \vec{v}_r = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

(si noti che le scelte in (4.12) non sono le uniche possibili). Ora lo Studente, usando (4.12) in (4.11), deve ritrovare il risultato (4.10).

Un ulteriore procedimento possibile per pervenire al risultato (4.10) consiste nell'utilizzare i metodi di minimizzazione delle funzioni reali

di variabile reale (si veda il corso di analisi matematica 1). Più precisamente, si può considerare la seguente funzione (costruibile facilmente usando (4.7) e le coordinate di  $P$ ):

$$(4.13) \quad f(t) = (t-1)^2 + (-t-1)^2 + (t-2)^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Questa funzione esprime la distanza al quadrato tra  $P$  e il generico punto di  $r$ . Il valore di  $t$  in cui si realizza il minimo per la funzione (4.13) sarà esattamente quello associato alle coordinate di  $Q$ : il lettore potrà quindi ritrovare (4.10) usando ancora (4.6).

**Soluzione dell'Es. 3.11:** (a) La retta  $r$  risulta parallela a  $[1, -1, 0]$ ; ne segue che l'equazione del piano  $\Pi$  che passa per  $P_0$  ed è perpendicolare a  $r$  è:

$$\Pi : \quad x - y = 0.$$

Ora,  $\text{dist}(P_0, r) = \text{dist}(P_0, Q)$ , dove  $Q = \Pi \cap r$ . Si trova

$$Q = [0, 0, 2] \quad \text{e} \quad \text{dist}(P_0, r) = \sqrt{6}.$$

(b) Il piano  $\Pi$  appartiene al fascio di piani generato dall'asse  $z$  e pertanto la sua equazione è del tipo:

$$\lambda x + \mu y = 0.$$

Imponendo il passaggio per  $P_0$  si ottiene:

$$\Pi : \quad x - y = 0.$$

(c) Il piano  $\Pi'$  appartiene al fascio di piani generato dall'asse  $y$  e pertanto la sua equazione è del tipo:

$$\lambda x + \mu z = 0.$$

Imponendo il passaggio per  $P_0$  si ottiene:

$$\Pi' : \quad z = 0.$$

**Soluzione dell'Es. 3.8:**

(a)  $\text{dist}(P_0, r) = \text{dist}(P_0, Q)$ , dove  $Q = [0, -1, 0]$ . Si conclude poi  $\text{dist}(P_0, r) = 2\sqrt{3}$ .

(b)  $\Pi : \quad x - 2y + z - 2 = 0.$

(c) **Ad esempio**,  $C = [0, -1, 0]$  è un punto di  $r$ , quindi  $S$  può essere la sfera di equazione:  $x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$ . Più generalmente, dato che una rappresentazione parametrica di  $r$  è

$[t, -1, -t]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , la generica sfera che ha centro su  $r$  e passa per l'origine ha equazione:

$$(x - t)^2 + (y + 1)^2 + (z + t)^2 = 1 + 2t^2 ,$$

con il parametro  $t$  arbitrario in  $\mathbb{R}$ .

**Soluzione dell'Es. 3.9:** Il piano  $\Pi$  appartiene al fascio di piani generato da  $r$  e pertanto è della forma:

$$\lambda(x - y + z - 1) + \mu(x + 2z) = 0 .$$

Imponendo che  $O$  appartenga a  $\Pi$  si perviene a:

$$\Pi : \quad x + 2z = 0 .$$

**Soluzione dell'Es. 3.10:**

(a)  $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = [0, 0, -4]$ .

(b)

$$r : \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 4 + t \end{cases} , \quad \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases} .$$

(c)  $\Pi_1 : \quad 3x + y - z = 0$ .

(d)  $\Pi_2 : \quad y - 1 = 0$ .

(e)  $\Pi_3 : \quad x - y + z = 0$ .

**Soluzione dell'Es. 3.11:** La retta  $r$  risulta parallela a  $[1, -1, 0]$ ; ne segue che l'equazione del piano  $\Pi$  che passa per  $P_0$  ed è perpendicolare a  $r$  è:

$$\Pi : \quad x - y = 0 .$$

Ora,  $\text{dist}(P_0, r) = \text{dist}(P_0, Q)$ , dove  $Q = \Pi \cap r$ . Si trova

$$Q = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right] \quad \text{e} \quad \text{dist}(P_0, r) = \frac{3}{\sqrt{2}} .$$

**Ragionamento alternativo 1:** Usare la formula (4.11) ...

**Ragionamento alternativo 2:** Minimizzare una funzione  $f(t)$  come descritto in (4.13) ...

**Soluzione dell'Es. 3.16:** La retta  $r$  risulta parallela a  $[1, 0, -1]$ ; ne segue che l'equazione del piano  $\Pi$  che passa per  $P_0$  ed è perpendicolare

a  $r$  è:

$$\Pi : x - z = 0 .$$

Ora,  $\text{dist}(P_0, r) = \text{dist}(P_0, Q)$ , dove  $Q = \Pi \cap r$ . Si trova

$$Q = \left[ \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2} \right] \quad \text{e} \quad \text{dist}(P_0, r) = \frac{3}{\sqrt{2}} .$$

**Soluzione dell'Es. 3.13:**

(i)  $\text{dist}(r_2, O) = 1$ .

(ii)  $\pi : 2y - z = 0$ . In forma parametrica

$$\pi : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 2v \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R} .$$

(iii)

$$(4.14) \quad r : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} .$$

Per arrivare a questa espressione della comune perpendicolare  $r$ , il solutore geometricamente abile poteva ragionare come segue:  $r_1$  è parallela all'asse  $x$ , mentre  $r_2$  è parallela all'asse  $z$ . Quindi, necessariamente,  $r$  è parallela all'asse  $y$  e pertanto è del tipo

$$\begin{cases} x - c_1 = 0 \\ z - c_2 = 0 \end{cases} .$$

Ma, dato che  $r$  deve intersecare  $r_1$ , l'unica possibilità è  $c_2 = 2$ . In modo analogo, siccome  $r$  deve intersecare  $r_2$ , l'unica possibilità è  $c_1 = 1$  e quindi si trova (10.2).

(iv)

$$r' : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

**Soluzione dell'Es. 3.14:**

(i)  $\text{dist}(r_2, O) = 1$ .

(ii)  $\pi : 2y + z = 0$ . In forma parametrica

$$\pi : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = -2v \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

(iii)

$$r : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}.$$

(iv)

$$r' : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

**Soluzione dell'Es. 3.15:**

(a)

$$r : \begin{cases} y - 2 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}, \quad Q_1 = [3, 2, 2] \quad \text{e} \quad Q_2 = [2, 2, 2].$$

(b)

$$r_1^* : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

**Soluzione dell'Es. 3.16:** La retta  $r$  risulta parallela a  $[1, 0, -1]$ ; ne segue che l'equazione del piano  $\Pi$  che passa per  $P_0$  ed è perpendicolare a  $r$  è:

$$\Pi : x - z = 0.$$

Ora,  $\text{dist}(P_0, r) = \text{dist}(P_0, Q)$ , dove  $Q = \Pi \cap r$ . Si trova

$$Q = \left[ \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2} \right] \quad \text{e} \quad \text{dist}(P_0, r) = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

**Soluzione dell'Es. 3.17:**

(a)

$$\text{dist}(P, \Pi) = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

(b)

$$S : (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \frac{1}{6}.$$

(c)

$$P' = \left[ \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right] .$$

**Soluzione dell'Es. 3.18:** Una rappresentazione parametrica di  $r_1$  è  $[t, 1, -t]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . In particolare,  $r_1$  è parallela a  $\vec{W}_1 = [1, 0, -1]$ . Invece, una rappresentazione parametrica di  $r_2$  è  $[s, s, 1]$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . In particolare,  $r_2$  risulta parallela a  $\vec{W}_2 = [1, 1, 0]$ . La generica retta incidente a  $r_1$  e  $r_2$  può essere descritta mediante:

$$(4.15) \quad r_{s,t} : \quad \frac{x-s}{t-s} = \frac{y-s}{1-s} = \frac{z-1}{-t-1} .$$

Si noti che  $r_{s,t}$  è parallela al vettore  $\vec{W}_{s,t} = [t-s, 1-s, -t-1]$ . Quindi dobbiamo imporre

$$\begin{cases} \vec{W}_{s,t} \cdot \vec{W}_1 = 0 \\ \vec{W}_{s,t} \cdot \vec{W}_2 = 0 \end{cases} ,$$

che, facendo i calcoli, equivale a:

$$(4.16) \quad \begin{cases} 2t - s + 1 = 0 \\ t - 2s + 1 = 0 \end{cases} ,$$

da cui si ricavano i valori

$$(4.17) \quad s = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad t = -\frac{1}{3} .$$

Ora, sostituendo i valori (4.17) in (4.15) e calcolando si arriva a:

$$(4.18) \quad r (= r_{(1/3), -(1/3)}) : \quad \begin{cases} 3x + 3y - 2 = 0 \\ 3x - 3z + 2 = 0 \end{cases} .$$

Alternativamente, per semplificare quest'ultimo passaggio, si può osservare che  $r$  è parallela a

$$\vec{W}_{(1/3), -(1/3)} = \left[ -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right] \text{ parallelo a } [1, -1, 1] (= \vec{W}_r)$$

e passa per il punto di  $r_1$  associato a  $t = -(1/3)$ , cioè  $P_1 = [-(1/3), 1, (1/3)]$ . Si perviene così ancora a (4.18).

**Nota:** una rappresentazione parametrica di  $r$  è:

$$[-(1/3) + t, 1 - t, (1/3) + t] , \quad t \in \mathbb{R} .$$

## 5. NUMERI COMPLESSI: ESERCIZI PROPOSTI

**Esercizio 5.1.** Sia  $z_0 = -1 - 2i$ .

(a) Calcolare

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1}{z_0} \right) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} \left( \frac{1}{z_0^2} \right)$$

(b) Stabilire se  $z_0$  è una soluzione di  $P(z) = 0$ , dove  $P(z) = z^3 + z^2 + 3z - 5$ .

(c) Determinare una fattorizzazione di  $P(x) = x^3 + x^2 + 3x - 5$  in prodotto di fattori irriducibili (su  $\mathbb{R}$ ).

**Esercizio 5.2.** Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi, dopo aver verificato che

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0.$$

$$(a) 1 + i - \frac{i}{1 - 2i} \quad (b) \left( \frac{1+i}{1-i} - 1 \right)^2.$$

**Esercizio 5.3.** Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:

$$(a) -i \quad (b) -1 - i \quad (c) \frac{1}{3 + 3i} \quad (d) (1+i)(2-2i).$$

**Esercizio 5.4.** Sia  $z = \frac{1+i}{2-2i}$ .

$$(a) \text{Calcolare } \operatorname{Re}(z^6). \quad (b) \text{Calcolare } \operatorname{Im}(z^{22}).$$

**Esercizio 5.5.** Risolvere in  $\mathbb{C}$  le seguenti equazioni (*Suggerimento:* per l'equazione (b), osservare che  $1 + i$  è una radice del polinomio).

$$(a) z^6 = 64. \\ (b) z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4 = 0.$$

**Esercizio 5.6.** Determinare un polinomio  $P(z)$ , a coefficienti reali, di grado 5, avente  $z_0 = 3$  come radice semplice,  $z_1 = 2 - 3i$  come radice di molteplicità algebrica due e tale che  $P(0) = -3$ .

**Esercizio 5.7.** Risolvere in  $\mathbb{C}$ :

$$(a) \quad z\bar{z} - z + \frac{i}{4} = 0 . \qquad (b) \quad z^4 - z = 0 .$$

**Esercizio 5.8.** Verificare che  $z_0 = 2i$  è una radice di

$$P(z) = z^4 + z^3 + 5z^2 + 4z + 4$$

e calcolare tutte le altre radici di  $P(z)$ .

**Esercizio 5.9.** Rappresentare graficamente i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{C}$ :

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z - 3i| \leq 3\} .$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 3, 2\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(\bar{z}) \leq \operatorname{Re}(z) + 7\} .$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) \geq 0\} .$$

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^2) \leq 0, \operatorname{Im}(z) \geq 1\} .$$

**Esercizio 5.10.** Siano  $P(z) = z^5 + z^4 + z^3 + 8z^2 + 8z + 8$ ,  $P'(z) = z^2 + z + 1$ .

- (1) Calcolare quoziente  $Q(z)$  e resto  $R(z)$  della divisione di polinomi  $P(z)/P'(z)$ .
- (2) Determinare le radici in  $\mathbb{C}$  di  $P(z)$ , precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

**Esercizio 5.11.** Siano  $P(z) = z^5 - z^4 + z^3 + 8z^2 - 8z + 8$ ,  $P'(z) = z^2 - z + 1$ .

- (1) Calcolare quoziente  $Q(z)$  e resto  $R(z)$  della divisione di polinomi  $P(z)/P'(z)$ .
- (2) Determinare le radici in  $\mathbb{C}$  di  $P(z)$ , precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.



**Esercizio 5.12.** Determinare le soluzioni in  $\mathbb{C}$  della seguente equazione:

$$(5.1) \quad (z^2 + z + 1) \cdot (z^3 + 8) = 0 .$$

## 6. NUMERI COMPLESSI: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

**Soluzione dell'Es. 5.1:** (a)

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1}{z_0} \right) = -\frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} \left( \frac{1}{z_0^2} \right) = -\frac{4}{25} .$$

(b) Una sostituzione diretta consente di verificare che  $z_0$  effettivamente è una soluzione dell'equazione. Alternativamente, si può tenere conto del seguente fatto di interesse generale:

**Proprietà:** Sia  $P(z)$  un polinomio a coefficienti reali. Se  $z_0 = \alpha + i\beta$ , con  $\beta \neq 0$ , è una radice di  $P(z)$  allora anche  $\bar{z}_0$  è radice di  $P(z)$  e quindi il polinomio risulta divisibile per  $(z - \alpha)^2 + \beta^2$ .

Quindi, tenendo conto della proprietà precedente, possiamo dire che  $z_0$  è soluzione se e solo se  $P(z)$  risulta divisibile per  $z^2 + 2z + 5$ . In effetti, effettuando la divisione dei due polinomi, si ottiene facilmente

$$P(z) = (z^2 + 2z + 5) \cdot (z - 1) ,$$

che fornisce anche la risposta al punto (c).

**Soluzione dell'Es. 5.2:**

$$(a) \quad \sqrt{(13/5)} \qquad (b) \quad 2$$

**Soluzione dell'Es. 5.3:**

$$\begin{array}{ll} (a) \quad e^{i(3/2)\pi} & (c) \quad (\sqrt{2}/6) e^{i(7/4)\pi} \\ (b) \quad \sqrt{2} e^{i(5/4)\pi} & (d) \quad 4 \end{array}$$

**Nota:** nel caso (d) abbiamo direttamente scritto  $e^{i0} = 1$ .

**Soluzione dell'Es. 5.4:** Si calcola preliminarmente

$$z = \frac{1}{2} e^{i(\pi/2)} .$$

Da ciò si conclude facilmente:

$$(a) \operatorname{Re}(z^6) = -\frac{1}{64} \qquad (b) \operatorname{Im}(z^{22}) = 0$$

**Soluzione dell'Es. 5.5:** (a)

$$z_0 = 2, \quad z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_3 = -2, \quad z_4 = \bar{z}_2, \quad z_5 = \bar{z}_1.$$

(b)

$$1 \pm i, \quad 1, \quad 2.$$

**Soluzione dell'Es. 5.6:**

$$P(z) = \frac{1}{169} (z - 3) [(z - 2)^2 + 9]^2.$$

**Soluzione dell'Es. 5.7:** (a) Abbiamo 2 soluzioni:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}.$$

(b)

$$0, \quad 1, \quad -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Soluzione dell'Es. 5.8:**

$$P(z) = (z^2 + 4) \cdot (z^2 + z + 1),$$

per cui le sue radici sono

$$\pm 2i, \quad -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Soluzione dell'Es. 5.9:** Ci si riconduce a semplici esercizi di geometria analitica nel piano cartesiano ponendo  $z = x + iy$ . Ad esempio, l'insieme  $C$  è caratterizzato dalla condizione  $x^2 \geq y^2$  che lo Studente avrà cura di analizzare evitando errori triviali. Gli altri casi sono simili.

**Soluzione dell'Es. 5.10:**

$$(1) Q(z) = z^3 + 8 \text{ e } R(z) \equiv 0.$$

- (2) Osservando che  $P(z) = Q(z) \cdot P'(z)$  si trovano 5 radici in  $\mathbb{C}$  (ognuna con molteplicità algebrica 1):

$$z_0 = -2, \quad z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = \bar{z}_1 = 1 - i\sqrt{3},$$

$$z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_4 = \bar{z}_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Soluzione dell'Es. 5.11:**

- (1)  $Q(z) = z^3 + 8$  e  $R(z) \equiv 0$ .  
 (2) Osservando che  $P(z) = Q(z) \cdot P'(z)$  si trovano 5 radici in  $\mathbb{C}$  (ognuna con molteplicità algebrica 1):

$$z_0 = -2, \quad z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = \bar{z}_1 = 1 - i\sqrt{3},$$

$$z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_4 = \bar{z}_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Soluzione dell'Es. 5.12:** Si risolvono separatamente le due equazioni:

$$(i) \quad z^2 + z + 1 = 0 \quad \text{e} \quad (ii) \quad z^3 + 8 = 0.$$

Per la (i) si trovano:

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{e} \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Per la (ii) si trovano:

$$z_3 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_4 = -2 \quad \text{e} \quad z_5 = 1 - \sqrt{3}i.$$

In conclusione, le cinque soluzioni richieste sono  $z_1, \dots, z_5$ .

## 7. MATRICI: ESERCIZI PROPOSTI

**Esercizio 7.1.** Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

- (1) Calcolare  $C = 3A - 2B$ .
- (2) Calcolare  $A \cdot B$  e  $B \cdot A$ .
- (3) Calcolare  $A^3 - A \cdot B + B \cdot I \cdot A$ , dove  $I$  è la matrice identità di ordine 3.

**Esercizio 7.2.** (\*) Siano  $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$  tre matrici quadrate dello stesso ordine. Il prodotto di matrici soddisfa la proprietà associativa, ovvero:

$$(7.1) \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

Ragionare sulla proprietà (7.1), prima attraverso esempi e poi, almeno per matrici di ordine 2, nel caso generale.

**Esercizio 7.3.** Si consideri, al variare di  $t \in \mathbb{R}$ , la seguente famiglia di matrici:

$$A_t = \begin{bmatrix} -t & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & (1+t) \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

- (1) Stabilire per quali valori di  $t \in \mathbb{R}$  la matrice  $A_t$  risulta invertibile e, per tali valori, calcolare  $(A_t)^{-1}$ .
- (2) Ripetere la domanda precedente con  $(A_t)^2$ , procedendo con calcoli diretti.
- (3) Ottenere il risultato precedente in modo più rapido, avvalendosi del Teorema di Binet e dell'unicità dell'inversa.

**Esercizio 7.4.** Si consideri, al variare di  $t \in \mathbb{R}$ , la seguente famiglia di matrici:

$$A_t = \begin{bmatrix} -t & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & (1+t) & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R}).$$

Calcolare, in funzione di  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\rho(A_t)$ .

**Esercizio 7.5.** Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ 2 & 1+i \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) .$$

Calcolare  $A^{-1}$  .

**Esercizio 7.6.** Si consideri la seguente matrice:

$$(7.2) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R}) .$$

Calcolare  $\rho(A)$ .

**Esercizio 7.7.** Si consideri la matrice

$$(7.3) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) .$$

Calcolare, se possibile,  $A^{-1}$ .

**Esercizio 7.8.** Si consideri la seguente famiglia di matrici dipendenti dal parametro  $t \in \mathbb{R}$ :

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ (t^2 - 1) & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R}) .$$

Calcolare  $\rho(A_t)$  in funzione di  $t \in \mathbb{R}$ .

## 8. MATRICI: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

**Soluzione dell'Es. 7.1:** (a)

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 12 \\ 4 & 15 & 10 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} .$$

(b)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ -2 & 25 & 15 \\ -2 & 18 & 14 \end{bmatrix} , \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ -1 & 11 & 11 \\ 4 & 18 & 27 \end{bmatrix} .$$

(c)

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{bmatrix} 11 & 28 & 46 \\ 28 & 99 & 148 \\ 23 & 74 & 113 \end{bmatrix}, \quad B \cdot I \cdot A = B \cdot A \text{ (calcolato sopra)}$$

Con questi elementi si completa facilmente il calcolo richiesto ...

**Soluzione dell'Es. 7.2:** In pratica, si deve essere consapevoli di poter scambiare l'ordine delle sommatorie coinvolte:

$$(8.1) \quad [A \cdot (B \cdot C)]_{il} = \sum_{k=1}^n \left[ a_{ik} \left( \sum_{j=1}^n b_{kj} c_{j\ell} \right) \right] = \sum_{j=1}^n \left[ \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) c_{j\ell} \right] = [(A \cdot B) \cdot C]_{il}$$

Per verifica, il lettore potrebbe scrivere esplicitamente la (8.1) nel caso  $n = 2$ .

**Soluzione dell'Es. 7.3:**

$$\det(A_t) = -[3t^2 - 5t + 6] \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quindi  $(A_t)^{-1}$  esiste per ogni valore reale di  $t$ . Posto  $\Delta_t = \det(A_t)$ , si calcola:

$$(A_t)^{-1} = \frac{1}{\Delta_t} \begin{bmatrix} 3t - 5 & 4 & -6 \\ 4 & -t^2 - t - 2 & 4t \\ -3 & 2t & -3t \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

(b)(c)

Per il Teorema di Binet  $\det[(A_t)^2] = \det(A_t) \cdot \det(A_t)$ , quindi  $(A_t)^2$  è invertibile per ogni valore di  $t \in \mathbb{R}$ . Inoltre, grazie alla proprietà associativa dimostrata nell'Es. 7.2, possiamo concludere subito che

$$[(A_t)^2]^{-1} = (A_t)^{-1} \cdot (A_t)^{-1}.$$

**Soluzione dell'Es. 7.4:** Considerando le colonne  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  si conclude molto facilmente che  $\rho(A_t) = 3$  per ogni valore di  $t \in \mathbb{R}$ .

**Soluzione dell'Es. 7.5:**  $\det(A) = 2 \neq 0$ , per cui  $A$  è invertibile.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ -1 & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) .$$

**Soluzione dell'Es. 7.6:** Si osserva che il minore di ordine 2 estratto da  $R_1, R_2, C_1$  e  $C_2$  è:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 ,$$

per cui  $\rho(A) \geq 2$ . Poi, si verifica che i **3** minori di ordine 3 che lo **orlano** sono tutti nulli. Quindi, applicando il Teorema di Kronecker si può concludere che  $\rho(A) = 2$ .

**Soluzione dell'Es. 7.7:** Un primo calcolo fornisce  $\det(A) = 4 \neq 0$  per cui  $A^{-1}$  esiste. Si trova:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} .$$

**Soluzione dell'Es. 7.8:** Il minore

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} ,$$

estratto da  $R_1, R_2$  e  $C_2, C_3$ , è  $\neq 0$ , per cui  $\rho(A_t) \geq 2 \forall t \in \mathbb{R}$ . Orlando questo minore con  $C_4$  o con  $C_5$  si ottengono minori di ordine 3 nulli. Orlando invece con  $C_1$ , si ottiene (semplice calcolo!) un minore di ordine 3 che si annulla se e solo se  $t^2 - 1 = 0$ .

Conclusione:  $\rho(A_t) = 2$  se  $t = 1$  oppure  $t = -1$ . Invece  $\rho(A_t) = 3$  per tutti gli altri valori di  $t$ .

## 9. CURVE E SUPERFICI: ESERCIZI PROPOSTI

**Esercizio 9.1.** Si consideri la superficie regolare  $\mathcal{S}$  in  $\mathbb{R}^3$  parametrizzata da:

$$X(u, v) = \begin{cases} x = u v^2 \\ y = u - 1 \\ z = v \end{cases} .$$

Calcolare l'equazione del piano tangente  $T_P(\mathcal{S})$  nel punto  $P = [2, 1, 1]$ .

**Esercizio 9.2.** Si consideri la superficie regolare  $\mathcal{S}$  in  $\mathbb{R}^3$  parametrizzata da:

$$X(u, v) = \begin{cases} x = u^3 v \\ y = u \\ z = v + 1 \end{cases} .$$

Calcolare l'equazione del piano tangente  $T_P(\mathcal{S})$  nel punto  $P = [1, 1, 2]$ .

**Esercizio 9.3.** Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da:

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{2u^2 + u^4} \, du .$$

Calcolare la lunghezza del grafico di  $f$ .

**Suggerimento:** ricordare che, se  $h(u)$  è una funzione continua e

$$f(x) = \int_a^x h(u) \, du ,$$

allora

$$f'(x) = h(x) .$$

**Esercizio 9.4.** Si consideri la curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da:

$$\gamma(t) = [t^3 - 1 + t, t^3 + 2, t - 1] .$$

Calcolare curvatura e torsione di  $\gamma$ . Stabilire se  $\gamma$  è una curva piana.

**Esercizio 9.5.** (\*) Si consideri il luogo di punti (*cono*) definito da:

$$(9.1) \quad \mathcal{S} : \{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geq 0 \} .$$



(a) Verificare che

$$(9.2) \quad \vec{X}(u, v) = \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u, \quad u \geq 0, \quad 0 \leq v < 2\pi \end{cases}$$

è una parametrizzazione del cono  $\mathcal{S}$ .

- (b) Disegnare  $\mathcal{S}$ , verificando che si tratta di una superficie regolare in tutti i punti eccetto l'origine.
- (c) Sia  $C_t = [0, 0, t]$ ,  $t > 0$ . Scrivere l'equazione della sfera  $S_t$  tangente al cono  $\mathcal{S}$  e avente centro in  $C_t$ .
- (d) Scrivere l'equazione del piano tangente  $T_P(\mathcal{S})$  in  $P = [1, 0, 1]$ .
- (e) Definire una curva  $\gamma(t)$  in  $S$  con comportamento elicoidale ed esprimere la sua lunghezza attraverso un opportuno integrale.

**Esercizio 9.6.** (\*) Si considerino le due rette  $r_1, r_2$  definite da:

$$(9.3) \quad r_1 : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}.$$

Determinare la comune perpendicolare  $r$  a  $r_1$  e  $r_2$  impostando il problema come ricerca di un punto di minimo per un opportuno campo scalare di due variabili.

**Esercizio 9.7.** (\*) Si considerino i due piani di equazione rispettivamente  $\pi_1 : x + z = 0$  e  $\pi_2 : x - y = 0$ . Descrivere la famiglia di sfere tangenti ad entrambi questi due piani.

## 10. CURVE E SUPERFICI: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

**Soluzione dell'Es. 9.1:**

$$T_P(\mathcal{S}) : \quad x - y - 4z + 3 = 0 .$$

**Soluzione dell'Es. 9.2:**

$$T_P(\mathcal{S}) : \quad x - 3y - z + 4 = 0 .$$

**Soluzione dell'Es. 9.3:** Consideriamo il grafico di  $f(x)$  come la curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizzata da:

$$\gamma(t) = [t, f(t)] \quad , \quad t \in [0, 1] .$$

Ora:

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \dots = \int_0^1 (1 + t^2) dt = \frac{4}{3} .$$

**Soluzione dell'Es. 9.4:** Possiamo calcolare la curvatura  $k(t)$  di  $\gamma$

applicando direttamente la formula data esplicitamente nel capitolo sulle curve. Si arriva a:

$$k(t) = \frac{2\sqrt{3}}{[8t^2 + 4t + 2]^{(3/2)}} .$$

In modo simile, applicando la formula per calcolare la torsione  $\tau(t)$ , otteniamo  $\tau(t) \equiv 0$ , da cui deduciamo che  $\gamma$  è piana. Più precisamente, un'ispezione diretta della parametrizzazione di  $\gamma$  rivela che essa giace interamente nel piano di equazione  $x - y + z + 4 = 0$ .

**Soluzione dell'Es. 9.5:** (a)

$$(u \cos v)^2 + (u \sin v)^2 u^2 = 0 \quad \text{OK} .$$

(b) Il cono ha vertice nell'origine ed è formato da una famiglia di circonferenze con centro sulla parte positiva dell'asse  $z$ .

$$(10.1) \quad \vec{N} = \vec{X}_u \wedge \vec{X}_v = [-u \cos v, u \sin v, u] \neq \vec{O} \quad \text{se } u \neq 0 .$$

(c)

$$S_t : \quad x^2 + y^2 + (z - t)^2 = R_t^2 ,$$

dove

$$R_t^2 = \frac{t^2}{2} .$$

**Nota:** per calcolare  $R_t$  si può osservare che  $R_t$  coincide con la distanza tra  $C_t$  e, **ad esempio**, la retta

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 . \end{cases}$$

(d)  $P = \vec{X}(1, 0)$ , per cui in questo punto il vettore normale (10.1) è  $[-1, 0, 1]$ . Da ciò si arriva facilmente a

$$T_P(\mathcal{S}) : \quad x - z = 0 .$$

(e) Ad esempio, si può considerare

$$\gamma(t) = [t \cos t, t \sin t, t] , \quad 0 \leq t \leq 10 .$$

La sua lunghezza è data da

$$L(\gamma) = \int_0^{10} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{10} \sqrt{2+t^2} dt .$$

**Soluzione dell'Es. 9.6: Nota:** usando metodi di geometria analitica si perviene alla comune perpendicolare

$$(10.2) \quad r : \begin{cases} 4x - y + 3 = 0 \\ x - z = 0 . \end{cases}$$

Passiamo ora al procedimento alternativo richiesto dall'esercizio: indichiamo con  $Q_i = r \cap r_i$ ,  $i = 1, 2$ , i due punti di intersezione di  $r$  rispettivamente con  $r_1$  e  $r_2$ . Geometricamente è chiaro che tali due punti minimizzano la distanza tra un generico punto di  $r_1$  ed un generico punto di  $r_2$ . Analiticamente, ciò corrisponde a dire quanto segue: il generico punto su  $r_1$  è descritto da  $[2t, -t, 2t]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , mentre il generico punto su  $r_2$  è descritto da  $[s, 1, -1-s]$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Quindi minimizziamo in  $\mathbb{R}^2$  la funzione distanza (al quadrato, per non trascinarci nei calcoli delle derivate parziali un'inutile radice quadrata):

$$(10.3) \quad f(s, t) = (2t - s)^2 + (-t - 1)^2 + (2t + 1 + s)^2 .$$

Si calcola facilmente

$$\nabla f = [18t + 6, 4s + 2] ,$$

da cui si conclude che il minimo è nel punto  $t = -(1/3)$ ,  $s = -(1/2)$ . A questi valori sono associati i punti

$$Q_1 = \left[ -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right] \quad \text{e} \quad Q_2 = \left[ -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right] .$$

In conclusione,  $r$  è la retta che passa per  $Q_1$  e  $Q_2$ , ovvero (10.2).

**Soluzione dell'Es. 9.7:** I centri di tali sfere devono essere equidistanti rispetto ai due piani del problema. Imponendo questo requisito se ne deduce che tali centri stanno sul piano  $y + z = 0$  **oppure** sul piano  $2x - y + z = 0$ . Le sfere sono quindi del tipo

$$(x - s)^2 + (y - t)^2 + (z + t)^2 = \frac{(s - t)^2}{2} , \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad s \neq t ,$$

**oppure**

$$(x - s)^2 + (y - 2s - t)^2 + (z - t)^2 = \frac{(s + t)^2}{2} , \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad s \neq -t .$$

## 11. SISTEMI LINEARI E SPAZI VETTORIALI: ESERCIZI PROPOSTI

**Esercizio 11.1.** Siano ( $t \in \mathbb{R}$ )

$$A_t = \begin{bmatrix} t & (1-t) & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Stabilire per quali valori di  $t \in \mathbb{R}$  il sistema lineare  $A_t \cdot X = B$  ammette soluzione.  
 (b) Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema quando  $t = 1$ .

**Esercizio 11.2.** Determinare la soluzione del seguente sistema di Cramer a coefficienti in  $\mathbb{C}$ :

$$(11.1) \quad \begin{cases} (1+i)x - y = 1 \\ (1+i)x + y = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 11.3.** Determinare una base ortonormale del sottospazio vettoriale  $W$  di  $\mathbb{R}^4$  definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$(11.2) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 11.4.** Si consideri il sottospazio vettoriale  $W$  di  $\mathbb{R}^4$  definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$(11.3) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

- (a) Calcolare  $\dim(W)$  ;  
 (b) Determinare una base di  $W$  ;  
 (c) Determinare una base **ortonormale** di  $W$ .

**Esercizio 11.5.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcolare  $\rho(A)$ .
- (b) Determinare l'insieme  $W$  delle soluzioni del sistema lineare omogeneo  $A \cdot X = \vec{0}$  ( $X = {}^t[x_1, \dots, x_5]$ ).
- (c) Determinare una base  $\mathcal{C}$  di  $W$ .

**Esercizio 11.6.** Se possibile, risolvere in  $\mathbb{C}$ :

$$\begin{cases} iz_1 + 2z_2 - iz_3 = 4 \\ z_1 - iz_2 = 1 - 2i \\ z_1 - z_3 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 11.7.** Determinare le soluzioni dei seguenti sistemi lineari a coefficienti complessi:

$$(a) \quad \begin{cases} iz_1 + 2z_2 - (1 - i)z_3 + 2iz_4 = 1 \\ iz_2 - 2z_3 + z_4 = 0 \\ iz_3 + 2z_4 = -2i \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} iz_1 + 2z_2 - z_3 = 1 \\ iz_2 - 2z_3 = 0 \\ z_1 + iz_2 - iz_3 = i. \end{cases}$$

**Esercizio 11.8.** Siano

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & (2-t) & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & (1-t) \\ 1 & t & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_t = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Stabilire per quali valori di  $t \in \mathbb{R}$  il sistema lineare  $A_t \cdot X = B_t$  ammette soluzione.
- (b) Per i valori di  $t \in \mathbb{R}$  per cui il sistema lineare  $A_t \cdot X = B_t$  è risolubile, determinare l'insieme delle soluzioni con il metodo di Cramer generalizzato.
- (c) Per i valori di  $t \in \mathbb{R}$  per cui il sistema lineare  $A_t \cdot X = B_t$  è risolubile, determinare l'insieme delle soluzioni mediante l'algoritmo di Gauss (confrontare il risultato ottenuto con quello trovato al punto precedente).

**Esercizio 11.9.** Studiare, al variare di  $t \in \mathbb{R}$ , la risolubilità dei seguenti sistemi e determinarne le eventuali soluzioni.

(a)

$$\begin{cases} x + tz + 1 = 0 \\ tx + y - 7 = 0 \\ x + y - t = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} tx + y = 1 \\ x + ty = t \\ tx + y = 2 \end{cases} .$$

(c)

$$tx + y - tz = 2 \quad .$$

## 12. SISTEMI LINEARI E SPAZI VETTORIALI: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

### Soluzione dell'Es. 11.1:

- (a) Il sistema risulta risolubile se e solo se  $t \neq (1/2)$ . Più precisamente, il sistema ammette  $\infty^1$  soluzioni se  $t \neq 1$ , e  $\infty^2$  soluzioni se  $t = 1$ .
- (b) Le soluzioni del sistema, quando  $t = 1$ , sono:

$$\{ {}^t[-2x_4, 1 - x_4, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4 : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \} .$$

### Soluzione dell'Es. 11.2: Abbiamo

$$(12.1) \quad A = \begin{bmatrix} (1+i) & -1 \\ (1+i) & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Si ha:  $\Delta = \det A = (2 + 2i) \neq 0$ , per cui

$$(12.2) \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{(2+2i)} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{(2+2i)} = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{(2+2i)} \begin{vmatrix} (1+i) & 1 \\ (1+i) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

In conclusione,  $X = {}^t[\frac{1}{4} - \frac{i}{4}, -\frac{1}{2}]$ .

### Soluzione dell'Es. 11.3: Il sistema ammette $\infty^1$ soluzioni:

$$W = \{ {}^t[x_4, -(2/3)x_4, -(2/3)x_4, x_4] \in \mathbb{R}^4 : x_4 \in \mathbb{R} \} .$$

Quindi  $\dim(W) = 1$  e una base di  $W$  è costituita, ad esempio, dal vettore  $\vec{w}_1 = {}^t [3, -2, -2, 3]$ .

Una base ortonormale quindi è costituita dal versore associato a  $\vec{w}_1$ , ovvero

$${}^t \left[ \frac{3}{\sqrt{26}}, -\frac{2}{\sqrt{26}}, -\frac{2}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}} \right].$$

**Soluzione dell'Es. 11.4:** (a) La matrice dei coefficienti del sistema (13.5) è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché  $\rho(A) = 2$ , concludiamo che  $\dim(W) = n - \rho(A) = 4 - 2 = 2$ .

(b) Risolvendo esplicitamente il sistema ( $x_3, x_4$  incognite libere) si ottiene:

$$W = \{[(1/2)x_3 - (1/2)x_4, (1/2)x_3 + (1/2)x_4, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4 : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Si arriva quindi, ad esempio, alla seguente **base** di  $W$ :

$$w_1 = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right], \quad w_2 = \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1 \right].$$

(c) Applicando il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt si perviene alla base **ortonormale** richiesta:

$$w'_1 = \left[ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0 \right], \quad w'_2 = \left[ -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}} \right].$$

**Soluzione dell'Es. 11.5:**

(a)  $\rho(A) = 2$ .

(b)  $W = \{ {}^t [-2x_4 - 3x_5, -x_3 - x_4 - 4x_5, x_3, x_4, x_5] \in \mathbb{R}^5 : x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \}$ .

(c)  $\dim W = 3$  e  $\mathcal{C} = \{ {}^t [0, -1, 1, 0, 0], {}^t [-2, -1, 0, 1, 0], {}^t [-3, -4, 0, 0, 1] \}$ .

**Soluzione dell'Es. 11.6:** Si tratta di un sistema di Cramer con  $\Delta = 2$ .

L'unica soluzione è:

$${}^t [1, 2, 1].$$

**Soluzione dell'Es. 11.7:** (*Traccia ...*) Il sistema (a) è un **sistema triangolare**. Procedendo per sostituzione diretta a partire dalla terza

equazione si ricavano le  $\infty^1$  soluzioni dipendenti dall'incognita libera  $z_4$ .

Il sistema (b) è un sistema di Cramer. Lo Studente deve applicare la formula risolutiva per questo tipo di sistemi e ottenere l'unica soluzione. Infine, si verifica la correttezza del risultato ottenuto controllando che esso soddisfi le tre equazioni del sistema.

**Soluzione dell'Es. 11.8:** (*Traccia ...*) (a) Il minore di ordine tre ricavato dalle prime tre colonne risulta non nullo se  $t \neq 1$ . Ne segue che il sistema è risolubile, con incognite libere  $x_4, x_5$ , se  $t \neq 1$ . Se  $t = 1$ , il sistema è omogeneo ed ammette tre incognite libere.

(b)(c) Caso  $t = 1$ : le soluzioni sono

$$\left\{ \begin{bmatrix} -(2/3)x_3 - x_4 \\ -(4/3)x_3 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 : x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Caso  $t \neq 1$ : le soluzioni sono descrivibili esplicitando la dipendenza di  $x_1, x_2, x_3$  dalle incognite libere  $x_4, x_5$ .

$$\left\{ \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 : x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} .$$

**Soluzione dell'Es. 11.9:** (a) Se  $t = 3$ , il sistema ammette un'unica soluzione  $[2, 1, -1]$ . Se  $t = -2$ , il sistema ammette un'unica soluzione  $[-3, 1, -1]$ . Per gli altri valori di  $t$  il sistema non è risolubile.

(b) Non risolubile  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

(c) Il sistema ha  $\infty^2$  soluzioni  $\forall t \in \mathbb{R}$  (descrive un piano in  $\mathbb{R}^3$ , quindi esplicitare le soluzioni equivale semplicemente a dare una rappresentazione parametrica di questo piano ...).



## 13. DIAGONALIZZAZIONE: ESERCIZI PROPOSTI

**Esercizio 13.1.** (\*) Si consideri l'applicazione lineare  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$(13.1) \quad \varphi(X) = A \cdot X ,$$

dove

$$(13.2) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e  $X = {}^t[x_1, x_2]$  sono le coordinate di un generico vettore di  $\mathbb{R}^2$  rispetto alla base canonica  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ .

(a) Sia  $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$  la base (non ortonormale) di  $\mathbb{R}^2$  definita dai vettori

$$(13.3) \quad \vec{w}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 , \quad \vec{w}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 .$$

Indicando con  $Y = {}^t[y_1, y_2]$  le coordinate di un generico vettore di  $\mathbb{R}^2$  rispetto alla base  $\mathcal{C}$ , determinare la matrice  $B \in M_2(\mathbb{R})$  che descrive  $\varphi$ , ovvero tale che

$$(13.4) \quad \varphi(Y) = B \cdot Y .$$

(b) Determinare (se possibile) una nuova base  $\mathcal{C}'$  rispetto alla quale  $\varphi$  risulti descritta da una matrice diagonale.

**Esercizio 13.2.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (i) Calcolare gli autovalori di  $A$  e, per ciascuno di essi, determinare molteplicità algebrica e geometrica.
- (ii) Determinare, se possibile,  $P \in M_3(\mathbb{R})$  tale che  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  sia una matrice diagonale.

**Esercizio 13.3.** Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$(13.5) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 13.4.** Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) .$$

Determinare (se possibile) una matrice invertibile  $P \in M_3(\mathbb{R})$  tale che  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  sia una matrice diagonale.

**Esercizio 13.5.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare gli autovalori di  $A$  e stabilire se  $A$  è diagonalizzabile.

**Esercizio 13.6.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile.

**Esercizio 13.7.** Studiare, in funzione del parametro  $t \in \mathbb{R}$ , la diagonalizzabilità di

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2t \\ 0 & t & 0 \\ -t & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 13.8.** Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) .$$

Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile.

**Esercizio 13.9.** Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) .$$

Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una matrice invertibile  $P \in M_4(\mathbb{R})$  tale che

$$P^{-1} \cdot A \cdot P$$

sia una matrice diagonale.

**Esercizio 13.10.** (\*) Ripetere l'Esercizio 13.9, utilizzando al posto di  $A$  le seguenti matrici:

$$(a) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 14. DIAGONALIZZAZIONE: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

**Soluzione dell'Es. 13.1:** (a) Chiariamo preliminarmente che la definizione di  $\varphi$  è equivalente (eseguendo il prodotto di matrici indicato in a (13.1)) a:

$$(14.1) \quad \varphi(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = (x_1 + x_2) \vec{e}_1 + (x_1 + x_2) \vec{e}_2 .$$

Per rispondere alla domanda studiamo ora il legame tra le coordinate  $X$  e le coordinate  $Y$ . Questa relazione si esplicita imponendo

$$(14.2) \quad x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 = y_1 \vec{w}_1 + y_2 \vec{w}_2 .$$

Usando ora (13.3) in (14.2) si ricava

$$(14.3) \quad x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 = y_1 (2 \vec{e}_1 - \vec{e}_2) + y_2 (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) ,$$

da cui si deduce:

$$(14.4) \quad \begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_2 \\ x_2 = -y_1 + y_2 \end{cases}$$

Se poniamo

$$(14.5) \quad P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

possiamo riscrivere la (14.4) in forma matriciale come segue:

$$(14.6) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

La matrice  $P$  in (14.6) è pertanto detta *matrice del cambiamento di base* tra le coordinate  $X$  e le coordinate  $Y$ . È importante osservare che le colonne di  $P$  sono costituite esattamente dalle coordinate dei vettori della base  $\mathcal{C}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ . Più esplicitamente, diciamo che la prima colonna di  $P$  si ottiene con le coordinate di  $\vec{w}_1$  etc.

Inoltre, dato che  $\mathcal{C}$  è una base,  $\det(P) \neq 0$  e dunque  $P^{-1}$  esiste e consente di esprimere la dipendenza di coordinate inversa rispetto a (14.6), ovvero

$$(14.7) \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ora abbiamo gli elementi per dedurre che, usando (14.6) e (14.7),

$$(14.8) \quad \varphi(Y) = (P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot Y$$

Lo Studente attento è invitato a riflettere sul fatto che, se avessimo scritto

$$(14.9) \quad \varphi(Y) = (A \cdot P) \cdot Y$$

usando solo (14.6), allora avremmo espresso l'immagine di  $\varphi$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ . Per questo motivo, ovvero per esprimere anche l'immagine di  $\varphi$  rispetto alle coordinate  $Y$ , è stato necessario usare (14.7) e quindi inserire opportunamente anche  $P^{-1}$  in (14.8).

In conclusione, confrontando (14.8) e (13.4), concludiamo che

$$(14.10) \quad B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Calcolando esplicitamente

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e sostituendo in (14.10) si ottiene

$$(14.11) \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Scegliere una base  $\mathcal{C}'$  equivale a scegliere una opportuna matrice invertibile  $P$ . Il fatto che  $\mathcal{C}'$  sia poi una *base ortonormale* è equivalente al fatto che  $P$  sia una matrice ortogonale (ovvero, una matrice tale che  ${}^tP = P^{-1}$ ). Ma, grazie alla teoria della diagonalizzazione delle matrici

simmetriche, che in questo caso possiamo applicare in quanto  ${}^tA = A$ , possiamo costruire proprio una matrice ortogonale  $P$  tale che

$${}^tP \cdot A \cdot P$$

è una matrice diagonale (che descrive  $\varphi$  rispetto alla base  $\mathcal{C}'$ !!). Facendo i calcoli si trova che

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \\ -(1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

soddisfa

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

In particolare,  $\mathcal{C}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  è la base ortonormale richiesta, dove

$$(14.12) \quad \vec{v}_1 = (1/\sqrt{2})\vec{e}_1 - (1/\sqrt{2})\vec{e}_2, \quad \vec{v}_2 = (1/\sqrt{2})\vec{e}_1 + (1/\sqrt{2})\vec{e}_2.$$

**Nota:** è importante sottolineare che i ragionamenti illustrati in questo esercizio funzionano anche per lo studio di applicazioni lineari  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  per ogni  $n \geq 2$ . Lo Studente di alto livello è invitato ad approfondire, ad esempio esplicitando la (14.1) rispetto agli altri vari set di coordinate incontrati nell'esercizio, le problematiche coinvolte in questo esercizio. Uno degli obiettivi da raggiungere è iniziare a percepire come la teoria della diagonalizzazione fornisca uno strumento fondamentale per lo studio delle applicazioni lineari  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Soluzione dell'Es. 13.2:** (i) Un calcolo fornisce:

$$P(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2),$$

per cui si deduce:

$$\lambda_1 = 0, \quad m_a(\lambda_1) = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2, \quad m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2).$$

Poi,  $m_g(\lambda_1) = 3 - \rho(A) = 2$ .

(ii) Grazie ai calcoli della parte (i), il criterio di diagonalizzabilità consente di concludere che  $A$  è diagonalizzabile e quindi  $P$  esiste. Si costruisce  $P$  e si ottiene, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**NOTA:** Questa  $P$  soddisfa:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Soluzione dell'Es. 13.3:** Bisogna controllare se sono soddisfatte le condizioni richieste dal criterio di diagonalizzabilità. Un primo calcolo fornisce il polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 .$$

Abbiamo un unico autovalore  $\lambda_1 = 0$ , con  $m_a(\lambda_1) = 3$ . D'altra parte, si ha:

$$m_g(\lambda_1) = n - \rho(A - \lambda_1 I) = 3 - \rho(A) = 2 ,$$

per cui  $m_g(\lambda_1) \neq m_a(\lambda_1)$  e, di conseguenza, la matrice  $A$  non risulta essere diagonalizzabile.

**Soluzione dell'Es. 13.4:** Si trovano gli autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \quad (m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1)) \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad (m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2)) .$$

Quindi  $A$  è diagonalizzabile e la matrice  $P$  richiesta dunque esiste. Si costruisce ora la matrice  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Soluzione dell'Es. 13.5:** Il polinomio caratteristico risulta essere

$$P(\lambda) = \lambda^2 \cdot (2 - \lambda) .$$

Pertanto abbiamo due autovalori:  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 2$ , con  $m_a(\lambda_1) = 2$ . Per applicare il criterio di diagonalizzabilità dobbiamo calcolare  $m_g(\lambda_1)$ . Si ottiene:

$$m_g(\lambda_1) = n - \rho(A - \lambda_1 I) = 3 - \rho(A) = 3 - 2 = 1 .$$

Poiché  $m_a(\lambda_1) \neq m_g(\lambda_1)$ , si conclude che  $A$  non è diagonalizzabile.

**Soluzione dell'Es. 13.6:** Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = -\lambda \cdot [(1 - \lambda)^2 + 1] ,$$

che ha due radici complesse, non reali,  $1 \pm i$ . Quindi  $A$  non è diagonalizzabile.

**Soluzione dell'Es. 13.7:** Il polinomio caratteristico di  $A_t$  è

$$P(\lambda) = (t - \lambda) [\lambda^2 + 2t^2] .$$

Ne segue che, se  $t \neq 0$ ,  $P(\lambda)$  ha radici complesse NON reali, quindi  $A_t$  non è diagonalizzabile per  $t \neq 0$ . Invece, se  $t = 0$ , la matrice è ovviamente diagonalizzabile in quanto è già diagonale.

**Soluzione dell'Es. 13.8:** Il polinomio caratteristico di  $A$  è

$$P(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda - 1)^2 ,$$

per cui  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$  (non ci sono radici complesse non reali). Ma  $m_a(\lambda_2) = 2$ , mentre  $m_g(\lambda_2) = 1$ , quindi  $A$  non è diagonalizzabile.

**Soluzione dell'Es. 13.9:** Il polinomio caratteristico di  $A$  è

$$P(\lambda) = \lambda^2 \cdot (1 - \lambda)(-1 - \lambda) ,$$

per cui abbiamo tre autovalori:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -1$  (non ci sono radici complesse non reali). Si verifica facilmente che  $m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1)$ , per cui  $A$  è diagonalizzabile. Si costruisce quindi la matrice  $P$  tale che

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Soluzione dell'Es. 13.10:** (a) Il polinomio caratteristico di  $B$  è

$$P(\lambda) = \lambda \cdot (\lambda + 1) (\lambda^2 - 3\lambda + 1) ,$$

per cui abbiamo quattro autovalori reali:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = (3 + \sqrt{5})/2$  e  $\lambda_4 = (3 - \sqrt{5})/2$ , per cui  $B$  è diagonalizzabile. Si costruisce

quindi la matrice  $P$  tale che

$$P^{-1} \cdot B \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Si trova (utile lavoro di calcolo!), ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\sqrt{5}) & (1-\sqrt{5}) \\ 1 & 0 & (1+\sqrt{5}) & (1-\sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

(b) Il polinomio caratteristico di  $C$  è

$$P(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda - 1)(\lambda + 1),$$

per cui abbiamo tre autovalori:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -1$  (non ci sono radici complesse non reali). Si verifica facilmente che  $m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1)$ , per cui  $A$  è diagonalizzabile. Si costruisce quindi la matrice  $P$  tale che

$$P^{-1} \cdot C \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Senza grosse difficoltà si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## 15. CONICHE: ESERCIZI PROPOSTI

**Esercizio 15.1.** Disegnare l'iperbole  $\gamma$  definita da

$$4x^2 - y^2 + 8x - 2y - 1 = 0 ,$$

precisando (rispetto alle coordinate  $x, y$ ):

- Le coordinate del centro  $C$  di  $\gamma$ .
- Le equazioni degli asintoti di  $\gamma$ .
- Le coordinate degli eventuali punti di intersezione di  $\gamma$  con gli assi  $x, y$ .

**Esercizio 15.2.** Svolgere lo studio completo della conica  $\gamma$  di equazione:

$$x^2 + 14xy + 49y^2 + 7\sqrt{50}x - \sqrt{50}y + 100 = 0$$

(assumere che la conica sia NON degenera, porre  $\lambda_1 > \lambda_2$ ).

La conica interseca uno dei due assi di partenza: quale? (Giustificare la risposta).

**Esercizio 15.3.** Si consideri il cambio di coordinate

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

dove:

$$P = \begin{bmatrix} (2/\sqrt{7}) & -(\sqrt{3}/\sqrt{7}) \\ (\sqrt{3}/\sqrt{7}) & (2/\sqrt{7}) \end{bmatrix} .$$

- (i) Calcolare  $P^{-1}$ .
- (ii) Stabilire se  $P$  è una matrice di rotazione.
- (iii) Sia  $\gamma$  l'ellisse di equazione:

$$2x'^2 + y'^2 = 1 .$$

Determinare l'equazione di  $\gamma$  rispetto alle coordinate  $x, y$ .

**Esercizio 15.4.** Studiare la seguente conica:

$$\gamma: 2x^2 + y^2 - 3xy - y + 2x = 0 .$$

**Esercizio 15.5.** Studiare la seguente conica:

$$\gamma: 7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy - 16 = 0 .$$

**Esercizio 15.6.** Studiare la seguente conica:

$$\gamma: x^2 + 9y^2 + 6xy + 30x - 10y = 0 .$$

## 16. CONICHE: SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

**Soluzione dell'Es. 15.1:** Usando il metodo del completamento dei quadrati si verifica facilmente che l'equazione di  $\gamma$  è equivalente a

$$(x+1)^2 - \frac{(y+1)^2}{4} = 1 ,$$

per cui  $\gamma$  è un'iperbole con  $a = 1$ ,  $b = 2$  e centro  $C = [-1, -1]$ . Le equazioni degli asintoti sono:

$$y = 2x + 1 \quad \text{e} \quad y = -2x - 3 .$$

L'iperbole interseca l'asse  $x$  nei punti di ascissa  $-1 \pm (\sqrt{5}/2)$ , mentre interseca l'asse  $y$  nel punto di ordinata  $-1$ . Da questi dati è facile realizzare la rappresentazione grafica di  $\gamma$ .

**Soluzione dell'Es. 15.2:** La conica è non degenere e si tratta di una parabola ( $\lambda_1 = 50$ ,  $\lambda_2 = 0$ ). Rispetto alle coordinate  $x'$ ,  $y'$ , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

dove

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{50}} & -\frac{7}{\sqrt{50}} \\ \frac{7}{\sqrt{50}} & \frac{1}{\sqrt{50}} \end{bmatrix} ,$$

l'equazione della conica  $\gamma$  diventa:

$$50x'^2 - 50y' + 100 = 0 ,$$

ovvero

$$y' = x'^2 + 2 .$$

Osservando che le colonne di  $P$  rappresentano i versori degli assi ruotati si procede al disegno dei nuovi assi (l'asse  $x'$  ha equazione  $y = 7x..$ ) e al disegno qualitativo della parabola.

La parabola non interseca l'asse  $y$ , in quanto l'equazione  $49y^2 - \sqrt{50}y + 100 = 0$  ha  $\Delta < 0$ . Invece, interseca l'asse  $x$  dato che l'equazione  $x^2 + 7\sqrt{50}x + 100 = 0$  fornisce soluzioni accettabili.

**Soluzione dell'Es. 15.3:** (i) Un semplice calcolo fornisce:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} (2/\sqrt{7}) & (\sqrt{3}/\sqrt{7}) \\ -(\sqrt{3}/\sqrt{7}) & (2/\sqrt{7}) \end{bmatrix} .$$

(ii) Poiché  $\det P = 1$  e  $P^{-1} = {}^tP$  si può concludere che  $P$  è una matrice di rotazione.

(iii) Ora

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = {}^tP \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ,$$

ovvero:

$$(16.1) \quad \begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{7}}x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}x + \frac{2}{\sqrt{7}}y . \end{cases}$$

Usando (16.1) nell'equazione di  $\gamma$  si ottiene:

$$\gamma : \quad 2 \left( \frac{2}{\sqrt{7}}x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}y \right)^2 + \left( -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}x + \frac{2}{\sqrt{7}}y \right)^2 = 1 ,$$

ovvero:

$$\gamma : \quad \frac{11}{7}x^2 + \frac{10}{7}y^2 + \frac{4\sqrt{3}}{7}xy = 1 .$$

**Soluzione dell'Es. 15.4:** Si tratta di una conica degenera. Dato che  $\gamma$  passa per l'origine possiamo ipotizzare che la sua equazione sia del tipo

$$(ax + by)(cx + dy + e) = 0 .$$

Con semplici calcoli vediamo che effettivamente l'equazione di  $\gamma$  si può riscrivere come segue:

$$(2x - y)(x - y + 1) = 0 .$$

Ne segue che  $\gamma$  è l'unione delle due rette  $r_1 : y = 2x$  e  $r_2 : y = x + 1$ . Quindi è immediato completare l'esercizio realizzando la rappresentazione grafica di  $\gamma$ .

**Soluzione dell'Es. 15.5:** (*Traccia ...*) Ellisse. Assi  $x', y'$  ruotati di un angolo  $\vartheta = (\pi/6)$  in senso antiorario. Rispetto a queste coordinate l'equazione di  $\gamma$  è:

$$\frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1 .$$

È importante completare i vari dettagli ed il disegno di  $\gamma$ .

**Soluzione dell'Es. 15.6:** (*Traccia ...*) Parabola. Assi  $x', y'$  definiti attraverso:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}} x' - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} y' \\ y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} x' + \frac{1}{\sqrt{10}} y' . \end{cases}$$

Rispetto a queste coordinate l'equazione di  $\gamma$  risulta essere:

$$\frac{1}{\sqrt{10}} y' = x'^2 .$$

È importante completare i vari dettagli ed il disegno di  $\gamma$ .

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA, VIALE MERELLO 93, 09123 CAGLIARI, ITALIA  
E-mail address: rattoa@unica.it