La rigorizzazione dell'analisi

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2020-21

Carnot: le “equazioni imperfette”

- Nel 1797, Lazare Carnot scrive le sue *Réflexions sur la métaphisyque du calcul infinitésimal*, che conoscono un enorme successo e vengono più volte tradotte e ristampate.
- Secondo Carnot, infiniti e infinitesimi sono delle “semplici quantità variabili caratterizzate dalla natura dei loro limiti”. “Un infinitesimo è la differenza tra una quantità qualunque e il suo limite”. Queste definizioni saranno riprese più tardi da Cauchy.
- L’analisi infinitesimale è un calcolo di errori compensati, nel quale l’uso degli infinitesimi serve solo a facilitare i calcoli; attraverso l’eliminazione degli infinitesimi nel risultato finale si trasformano delle “equazioni imperfette” in risultati esatti.

Hegel, Marx, Engels: le contraddizioni dell'analisi

- Nella *Scienza della logica* (1813-16), Hegel volge in positivo le contraddizioni presenti nei fondamenti del calcolo infinitesimale, che richiede procedimenti inapplicabili alle grandezze finite e al contempo "tratta le sue grandezze infinite come quanti finiti".
- Nell'*Antidühring* (1877), Engels spiega i processi di differenziazione e integrazione sostenendo che da grandezze x, y si passa alla loro "negazione" dx e dy e poi alla "negazione della negazione" integrando la derivata $\frac{dy}{dx}$. Siamo così in presenza di una triade hegeliana, che però non ci riporta al punto di partenza.
- Marx fa considerazioni simili nei suoi manoscritti matematici degli anni '80. A differenza di Hegel, però, Marx e Engels scrivono in un periodo in cui le aporie nei fondamenti dell'analisi sono state risolte da tempo.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Cauchy: l'eliminazione degli infinitesimi

- Grazie all'opera di Gauss, Cauchy e Bolzano, all'inizio dell'Ottocento l'esigenza di rigore nei fondamenti inizia a farsi strada nell'analisi. Vengono definiti rigorosamente i concetti di *limite* e di *funzione continua*, in modo da evitare il ricorso agli infinitesimi di Leibniz. In particolare, fondamentale è il *Cours d'analyse* (1821) di Cauchy.
- Ecco alcune definizioni dei concetti fondamentali dell'analisi date da Cauchy:

Il limite dei valori successivamente assunti da una variabile è un valore fissato a cui essi si avvicinano indefinitamente, in modo da differirne di tanto poco quanto si vuole.

Un infinitesimo è una variabile che ha zero come limite [...] L'infinito è il limite dei valori della variabile quando crescono sempre di più in modo da superare ogni numero dato.

Una funzione è continua se un incremento infinitesimo della variabile produce sempre un incremento infinitesimo del valore della funzione.

Cauchy: le definizioni di limite e funzione continua

Definition

Il numero reale r è il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a p, in simboli

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = r,$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $|f(x) - r| < \epsilon$ ogniqualvolta $|x - p| < \delta$.

Definition

Una funzione f nella variabile x è continua nel punto p se f è definita in p e

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = f(p).$$

Bernard Bolzano (1781-1848)

Bolzano: i risultati matematici

- Sin dal 1817 Bolzano è cosciente dell'esigenza di rigore nel campo dell'analisi, tanto che Klein lo definì "il padre dell'aritmetizzazione". Cauchy ebbe però un'influenza incomparabilmente maggiore, sebbene fosse ancora vincolato ad intuizioni geometriche.
- Bolzano è il primo a fornire un esempio di funzione continua su tutti i punti di un intervallo che però non ha derivata in nessun punto dell'intervallo dato.
- Bolzano dimostra due importanti risultati. (1) Se f è una funzione continua in ogni punto dell'intervallo chiuso $[a, b]$ e $f(a)$ ha segno opposto rispetto a $f(b)$, allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$. (2) (*Teorema di Bolzano-Weierstrass*) Ogni successione limitata di numeri reali ammette una sottosuccessione convergente.

Bolzano e l'infinito

- Nella *Wissenschaftslehre* (1837), Bolzano dimostra che l'insieme delle "verità in sé" è infinito. Osserva prima che esiste almeno una proposizione vera; poi osserva che se p è vera, "È vero che p" è una proposizione vera diversa da p.
- Nel 1850 esce postumo un volume di Bolzano intitolato *Paradoxien des Unendlichen (Paradossi dell'infinito)*. Scopre molte altre corrispondenze biunivoche tra insiemi infiniti e loro sottoinsiemi oltre a quelle già poste in luce da Galileo. Ad esempio, la funzione lineare $y = 2x$ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti degli intervalli $[0, 1]$ e $[0, 2]$.

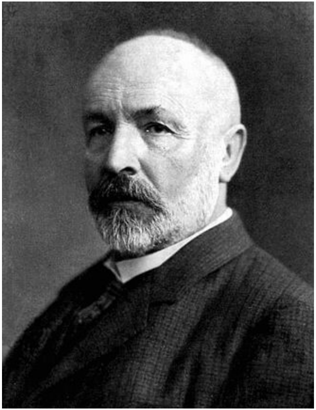
Il problema dei numeri reali

Rimaneva da definire il concetto più fondamentale, quello di *numero reale*.

Fino all'inizio dell'Ottocento, un numero reale r viene concepito geometricamente come rapporto tra due grandezze (commensurabili o incommensurabili, a seconda che r sia razionale o irrazionale). Il fatto che, ad esempio, il numero razionale $\sqrt[3]{2}$ esista (anche se un segmento che abbia tale misura non è costruibile con riga e compasso) viene giustificato in base a considerazioni intuitive sulla continuità geometrica: se lo spigolo di un cubo aumenta con continuità da 1 a 2, il volume del cubo aumenterà con continuità da 1 a 8 e "a un certo punto" dovrà assumere il valore 2.

Nel 1872, i matematici Weierstrass, Cantor e Dedekind propongono contemporaneamente *tre* diverse definizioni rigorose di numero reale.

Georg Cantor (1845-1918)



La definizione di Cantor

Definition

Una *successione di Cauchy* è una successione $A = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ di numeri razionali tale che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero naturale N tale che per tutti gli $m, n > N$ si abbia $|a_m - a_n| < \epsilon$.

Definition

Due successioni di Cauchy $A = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ e $B = (b_1, b_2, b_3, \dots)$ sono *equivalenti* (in simboli, $A \sim B$) sse per ogni $\epsilon > 0$ esiste un N tale che per tutti gli $m > N$ si abbia $|a_m - b_m| < \epsilon$.

La relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathcal{C}$ delle successioni di Cauchy. Inoltre, rispetta le operazioni definite da

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots)$$
$$(a_1, a_2, a_3, \dots) \cdot (b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots)$$

Un numero reale è la classe di equivalenza modulo $\sim$ di una qualche successione di Cauchy di numeri razionali.

Richard Dedekind (1831-1916)

La definizione di Dedekind

Definition

Una *sezione* dell'insieme totalmente ordinato $(A, <)$ dei numeri razionali è un sottoinsieme non vuoto $X \subset A$ con le seguenti proprietà:

- S1 Se $a \in X$ e $b < a$, allora $b \in X$ (*chiusura verso il basso*);
- S2 Non esiste m in X tale che $a \leq m$ per ogni $a \in X$ (*assenza di massimo*).

I numeri reali vengono identificati con le sezioni di $\mathbb{Q}$. Ad esempio:

$$2 = \{x \in \mathbb{Q} : x < 2\}\,;$$
$$\sqrt{2} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ oppure } x^2 < 2\}\,.$$

Dedekind: l'essenza della continuità

Definition

Un insieme totalmente ordinato $(A, <)$ si dice *continuo* se vengono soddisfatte le seguenti due condizioni.

1. Per ogni $a, b \in A$ tali che $a < b$, esiste un $c \in A$ tale che $a < c < b$ (*densità*);
2. Ogni sezione X di A ha un estremo superiore, ossia un elemento $e \in A$ tale che $e > x$ per ogni $x \in X$ e tale che e è il più piccolo elemento di A con questa proprietà.

Il fatto che l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali sia continuo, e che $\mathbb{Q}$ non lo sia, è un *assioma* che va esplicitamente postulato.

Dedekind e Cantor: continuo geometrico e aritmetico

Il modello di continuità che si afferma con le ricerche di Dedekind e Cantor è aritmetico: i modelli geometrici, intuitivi, della retta e dello spazio non sono più in primo piano. Dedekind afferma:

> *"Ammesso che lo spazio abbia un'esistenza reale, non è per esso necessario essere continuo; molte delle sue proprietà rimarrebbero uguali anche se esso fosse discontinuo. E se noi sapessimo per certo che lo spazio non è continuo, nulla ci impedirebbe di colmare le sue lacune".*

Cantor aggiunge:

> *"L'ipotesi della continuità dello spazio non è null'altro che l'assunzione, in sé arbitraria, della corrispondenza biunivoca e completa fra il continuo tridimensionale puramente aritmetico e lo spazio posto a fondamento del mondo dei fenomeni".*