Il dibattito sugli infinitesimi

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2020-21

Bernard Nieuwentyt (1654-1718)

Nieuwentyt: la critica agli infinitesimi

- Nell'*Analysis infinitorum* (1695), Nieuwentyt sostiene il principio secondo cui se due grandezze sono uguali, la loro differenza è nulla. Sembra un principio evidente, ma viene contraddetto da Leibniz quando considera uguali anche grandezze la cui differenza è infinitesima.
- Nieuwnetyt rifiuta gli infinitesimi di ordine superiore, criticando il fatto che nel calcolo infinitesimi come $dxdy$ o d^2x vengano eguagliati a 0.
- La sua posizione ha una base religiosa: se presupponiamo che un'estensione finita sia divisibile in parti infinitesime a loro volta continuamente divisibili senza mai annullarsi, arriviamo alla conclusione che la materia è eterna e con ciò all'ateismo.

Michel Rolle (1652-1719)

Rolle: la fronda antileibniziana

- Nella memoria *Du nouveau système de l'infini* (1704), Rolle stila un vero e proprio manifesto di chi a Parigi si oppone al nuovo calcolo leibniziano. Afferma senza mezzi termini:

  Sembra che la caratteristica dell'esattezza non regni più in geometria da quando vi ha fatto la sua comparsa il nuovo sistema di quantità infinitesime, un sistema che non ha prodotto nessuna nuova verità e spesso maschera errori.

- Tali errori consistono nel considerare uguali quantità che differiscono per infinitesimi, oppure ritenere questi ultimi talvolta diversi da 0, talaltra uguali a 0. Anche Rolle rifiuta gli infinitesimi di ordine superiore.

La controffensiva di Leibniz: l'argomento degli incomparabili

- Nel 1701, Leibniz replica alle obiezioni di Nieuwentyt giustifica l'uso degli infinitesimi ricorrendo alla metafora degli ordini di grandezza incomparabili. Confrontare un infinitesimo con un numero finito è come confrontare due grandezze il cui ordine rende l'una trascurabile rispetto all'altra. Tale metafora "redime" anche gli infinitesimi di ordine superiore:

  Il globo della Terra è un punto rispetto alla distanza delle stelle fisse, e una sfera nelle nostre mani ancora un punto a confronto del semi-diametro del globo terrestre, di modo che la distanza delle stelle fisse è un infinitamente infinito, ovvero un'infinità di infiniti rispetto al diametro della sfera.

- Comte criticherà Leibniz in quanto, trattando gli infinitesimi come incomparabili, avrebbe "completamente snaturato la sua analisi, riducendola a un calcolo approssimato".

La controffensiva di Leibniz: l'argomento della continuità

- Un argomento che giustifica l'esistenza degli infinitesimi è la legge di continuità. Una grandezza finita che decresce sino ad annullarsi ad un certo punto, per continuità, dovrà diventare infinitesima.
- Nel 1687, in una lettera a Bayle, Leibniz è più preciso circa tale principio. "Quando la differenza tra due casi può essere diminuita al di sotto di ogni grandezza assegnata, *in datis*, è necessario che si possa trovare diminuita al di sotto di ogni grandezza assegnata anche *in quaesitis*".
- Ad esempio, un cerchio può essere considerato come l'elemento terminale di una serie di poligoni regolari con un numero sempre maggiore di lati, così come la quiete può essere vista come l'elemento terminali di moti sempre più brevi.

La controffensiva di Leibniz: l'argomento delle finzioni

- In due lettere a Varignon (1702) e Fontenelle (1704), invece, Leibniz sembra negare la sostanzialità degli infinitesimi. Afferma che gli infinitesimi sono "finzioni ben fondate", al pari dei numeri immaginari che vengono usati per la risoluzione delle equazioni algebriche:

  Gli infinitesimi non sono delle grandezze. La mia metafisica li bandisce dai suoi territori. Dà loro ricovero solo negli spazi immaginari del calcolo geometrico, dove queste nozioni sono appropriate solo come le cosiddette radici immaginarie.

- Gli infinitesimi sarebbero insomma solo quantità piccole quanto si vuole, affinché l'errore sia minore di ogni quantità assegnata. Con ciò, aderisce alla posizione aristotelica di negazione dell'infinito attuale.

George Berkeley (1685-1753)

Berkeley: il programma ideologico

- Nel 1734, Berkeley pubblica *L'analista*, che ha come sottotitolo *Discorso a un matematico infedele*.
- Secondo Berkeley, i matematici presumono di essere i più grandi maestri delal ragione e sono poco religiosi perché ritengono che la religione sia incomprensibile e piena di misteri.
- Berkeley, però, vuole indagare gli oggetti, i principi e i metodi dimostrativi dei matematici con la stessa libertà con cui questi presumono di trattare i principi e i misteri della religione.
- L'obiettivo è mostrare come i "misteri" del calcolo infinitesimale siano ben più irrazionali dei dogmi di fede, e poggino su un fondamento meno saldo.

Berkeley: le critiche agli infinitesimi (1)

- I matematici pretendono evidenze certe in religione, e tuttavia non hanno difficoltà a credere in una successione infinita di infinitesimi, ciascuno infinitamente più piccolo del precedente e infinitamente più grande del successivo.
- Lo status degli infinitesimi non è chiaro: sono uguali a 0 o diversi da 0? Sembrano essere uguali a 0 quando vengono trascurati alla fine dei calcoli, ma o diversi da 0 quando figurano al denominatore delle frazioni. Per Berkeley, un tal modo di ragionare "sembra assolutamente inconsistente, e certo non sarebbe permesso in materia di religione".

Berkeley: le critiche agli infinitesimi (2)

- I risultati che si ottengono sono corretti, ma solo per una legge di compensazione degli errori. E argomenta che tutta l'analisi si basa su una serie di trucchi e di sofismi.
- Conclude:

Che cosa sono queste flussioni? Le velocità di incrementi evanescenti? Non sono né quantità finite, né quantità infinitamente piccole, ma nemmeno un nulla. Non potremmo chiamarle fantasmi di quantità defunte?

La reazione di MacLaurin

- Diversamente dai rilievi di Nieuwentyt e di Rolle, l'offensiva di Berkeley non suscita grande dibattito nel mondo matematico.
- un'eccezione è Colin MacLaurin (1698-1746), che nel suo *Treatise of fluxions* (1742) propugna un ritorno ai metodi dimostrativi di stampo geometrico degli antichi greci, per evitare l'impegno ontologico sugli infinitesimi.
- MacLaurin riesce così a dimostrare la convergenza di alcune serie infinite, ottiene formule che mettono in correlazione la derivata di una funzione con la derivata della funzione inversa, e pubblica la formula di quella che sarà poi nota come serie di MacLaurin (in realtà già nota a Gregory, Stirling e Jean Bernoulli):

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)\,x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Leonhard Euler (1707-1783)

Eulero: la concezione pragmatica

- Secondo Eulero (*Introductio in analysin infinitorum*, 1748), i differenziali $dx, dy\ldots$ sono da considerarsi nulli, eguali a 0. Ciò che non è nullo sono i loro rapporti $\frac{dx}{dy}$. Ma l'analisi non si occupa affatto delle "quantità evanescenti" in quanto tali, bensì sempre dei loro rapporti, che sono quantità finite.
- Infatti, anche se tanto dx quanto adx (con a finito) sono pari a 0, il rapporto $\frac{adx}{dx}$ è finito, come $\frac{a}{1}$. Similmente, dall'uguaglianza $a \pm ndx = a$ si deduce sia $ndx = a \pm ndx - a = a - a = 0$, sia $\frac{a \pm ndx}{a} = \frac{a}{a} = 1$, il che giustifica il fatto che gli infinitesimi possano essere tralasciati.
- Critica la metafora di Leibniz, secondo cui gli infinitesimi sono "pulviscolo" rispetto a una montagna o al globo terrestre: *rigor geometricus a tantillo errore abhorret*.

Eulero: gli errori sulle serie infinite

- Eulero era un maestro nelle manipolazioni algebriche sulle serie infinite, che però trattava a volte con eccessiva disinvoltura. Dallo sviluppo in serie
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots$$
deduce, per $x = 1$, $\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$, come se l'operazione $\frac{1}{0}$ fosse ben definita e come se ∞ fosse un numero a tutti gli effetti. Per $x = -1$, deduce inoltre $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$
- Pensa inoltre che, per a numero finito, $\frac{a}{0} = \infty$ e quindi $a = 0 \times \infty$.

Eulero: i teoremi sulle serie infinite

- A volte, mediante metodi scarsamente rigorosi, riesce però ad ottenere risultati corretti. Nel 1673, Oldenburg aveva posto il problema di trovare la somma dei reciproci dei quadrati perfetti, problema che né Leibniz né Jacques Bernoulli erano riusciti a risolvere:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \dots$$

- Eulero parte dallo sviluppo in serie $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots$, da cui, eguagliando a 0 e dividendo ambo i lati per z, ottiene $0 = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \dots$
- Nelle equazioni algebriche *di grado finito*, se il termine noto è 1, la somma dei reciproci delle radici è uguale al coefficiente del termine di primo grado cambiato di segno, ovvero $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.
- Estendendo indebitamente tale proprietà a equazioni di grado infinito, poiché le soluzioni di $\sin z = 0$ sono date dai multipli interi positivi di π, ottiene $\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} \dots$, ovvero $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \dots$

D'Alembert: contro la metafisica del calcolo

- D'Alembert, *Essai sur les éléments de philosophie* (1759): le espressioni matematiche contenenti l'infinito sono solo delle "maniere abbreviate di esprimersi, inventate dai matematici per enunciare delle verità il cui sviluppo ed enunciato esatto avrebbe richiesto molte più parole".
- Nell'*Enciclopedia*, dice che la teoria dei limiti è la base della vera metafisica del calcolo infinitesimale:

> *La supposizione degli infinitesimi è fatta solo per abbreviare e semplificare i ragionamenti, ma al fondo il calcolo differenziale non presuppone affatto necessariamente l'esistenza di queste quantità, e quel calcolo consiste solo nel determinare algebricamente il limite di un rapporto [...] La metafisica dell'infinito e degli infinitesimi maggiori o minori l'uno degli altri è totalmente inutile al calcolo differenziale.*