Gli indivisibili

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2020-21

Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

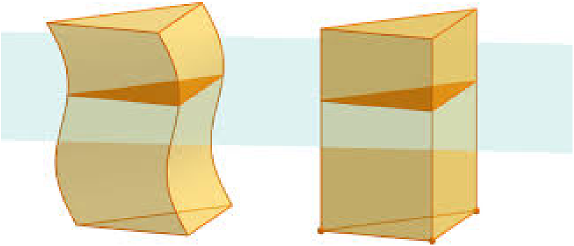
Cavalieri: il metodo degli indivisibili (1)

- Nel trattato *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635) concepisce una figura piana come formata da "linee indivisibili" e un solido da "figure piane indivisibili".
- Enuncia la proposizione ancora oggi chiamata *Teorema di Cavalieri*:

  Se due solidi hanno uguale altezza, e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi staranno in questo rapporto.

- Questo "metodo degli indivisibili" era stato scoperto prima del 1626 (ve n'è traccia in una lettera a Galileo), ma la sua pubblicazione venne ritardata per riguardo al maestro, che aveva manifestato l'intenzione di scrivere un volume sull'infinito — poi mai apparso.
- Applicando il suo metodo, Cavalieri scopre importanti relazioni ad es. tra la spirale e la parabola.

Cavalieri: il metodo degli indivisibili (2)

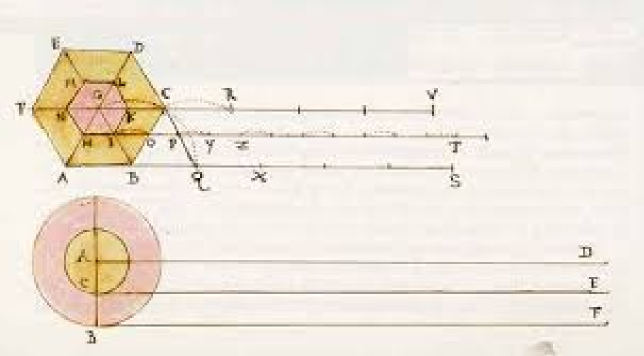


Cavalieri e Galileo

- Cavalieri, che ha conosciuto Galileo studiando matematica a Pisa, si rivolge spesso a lui come al proprio maestro.
- Diversamente da Galileo, Cavalieri è poco incline alla speculazione filosofica, e non si pronuncia sul fatto se il continuo sia *realmente* costituito da indivisibili. È sufficiente che "tanto se il continuo è composto da indivisibili, quanto se non lo è, gli aggregati degli indivisibili sono mutuamente confrontabili, ed hanno rapporto".
- Cavalieri riceve in dono da Galileo i *Discorsi e dimostrazioni matematiche* (1638). Ne rimane entusiasta: Galileo è "chi prima ardì solcare l'immensità del mare et ingolfarsi nell'oceano [...] Con la tramontana del suo altissimo ingegno ha potuto felicemente navigare l'immenso oceano degli indivisibili, de' vacui, degli infiniti".

Galileo Galilei (1564-1642)

Galileo: paradosso dei cerchi concentrici solidali



Galileo sugli indivisibili (1)

- Nel 1633 il peripatetico padovano Antonio Rocco (1586-1652), aristotelico eterodosso e libertino, pubblica le *Esercitazioni filosofiche* per difendere la filosofia aristotelica dalle critiche galileiane mosse nel *Dialogo sui massimi sistemi*.
- Rocco nega, con Aristotele, che una retta sia composta di punti indivisibili. Non accetta dunque che una sfera possa essere tangente a un piano in un punto, perché ne seguirebbe la negazione della tesi aristotelica. Galileo lo attacca frontalmente: "Questo è cervello stupido e nulla intelligente di quello che scrivo, ma bene arrogante e temerario". In diverse occasioni, gli riserva epiteti come "ignorantissimo", "balordone", "animalaccio", "elefantissimo", "pezzo di bue".

Galileo sugli indivisibili (2)

- Secondo Galileo, "è verissimo e necessario che la linea sia composta di punti e il continuo di indivisibili": "il continuo è divisibile in parti sempre divisibili sol perché consta di indivisibili". Di conseguenza, gli indivisibili non possono avere un'area o un volume: "perché infiniti quanti compongono un quanto infinito".
- Cavalieri, invece, dopo aver letto i *Discorsi*, nel 1639 ribadisce che

  Io non ardii di dire che che il continuo fosse composto di quelli [indivisibili], ma mostrai bene che fra continui non vi era altra proportione che della congerie de gl'indivisibili.

Galileo: i paradossi dell'infinito (1)

- Nei *Discorsi* si trovano i primi paradossi degli insiemi infiniti. Simplicio si chiede: dati due segmenti disuguali, il maggiore contiene più punti del minore? Salviati ribatte che questi problemi derivano "dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agl'infiniti".
- Salviati propone quindi il suo celebre argomento:

> *Se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima [...] Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può in verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato [...] Ma se io domanderò quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quanti tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri.*

Galileo: i paradossi dell'infinito (2)

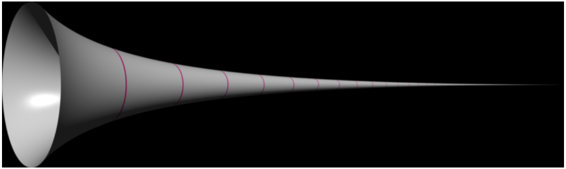
- Secondo Salviati-Galileo, quindi, le relazioni di maggiore, minore e uguale possono aver luogo solo tra quantità finite, e non tra insiemi infiniti. Addirittura, Galileo (con echi pitagorici) afferma che "se numero alcuno può dirsi infinito, questo sia l'unità", che contiene in sé, quadrati, cubi, quarte potenze etc. e quante altre "dignità" si vogliano, e quindi possiede "i necessari requisiti del numero infinito".
- Rispondendo al problema dei segmenti posto da Simplicio, Salviati dice quindi:

> *Quando il sig. Simplicio mi propone e mi domanda come possa essere che nelle maggiori non siano più punti che nelle minori, io gli rispondo che non ve ne sono né più, né manco né altrettanti, ma in ciascheduna infiniti.*

Evangelista Torricelli (1608-1647)

Torricelli e gli indivisibili (1)

- Torricelli entra in contatto con Cavalieri e (a detta dello stesso Cavalieri) supera ben presto il maestro nell'applicazione del metodo degli indivisibili. I risultati matematici ottenuti con questo metodo vengono spesso dimostrati anche con tecniche alternative, ritenute probabilmente più accettabili. Nell'*Opera geometrica* (1644), Torricelli introduce indivisibili curvi, circonferenze o superfici cilindriche.
- A Torricelli si deve l'ideazione del "solido iperbolico acutissimo", detto anche *tromba di Gabriele*, ottenuto dalla rivoluzione intorno all'asse x della curva di equazione $y = \frac{1}{x}$ (un ramo di iperbole equilatera) nell'intervallo $[1, +\infty)$.



Torricelli e gli indivisibili (2)

- Torricelli dimostra che il volume del solido per $x = a > 1$ è $V = \pi\left(1 - \frac{1}{a}\right)$, mentre l'area è $A = 2\pi \ln(a)$.
- Al tendere di a all'infinito, abbiamo $\lim_{a\to\infty} V = \pi$, mentre $\lim_{a\to\infty} A = \infty$. Abbiamo dunque un solido di area infinita e volume finito!
- Cavalieri, a letto con la gotta, apprende della scoperta di Torricelli e trova "infinitamente ammirabile quel solido iperbolico infinitamente lungo, ed eguale ad un corpo quanto a tutte le tre dimensioni finito". Scrive: "Non so come abbi pescato nell'infinita profondità di quel solido così facilmente la sua dimensione [...] A me pare infinitamente lungo, parendomi infinitamente lungo lo spazio piano che lo genera".

L'offensiva dei gesuiti (1)

- Già nel 1606 il Collegio romano dichiara "erronea in filosofia" la tesi secondo cui il continuo è composto di indivisibili, insegnate nelle scuole gesuite del Belgio. Nel 1632, subito dopo il sequestro del *Dialogo* galileiano, ribadisce che questa proposizione è "non solo in contrasto con la comune dottrina aristotelica, ma anche improbabile in se stessa" e quindi "disapprovata e proibita nella nostra Compagnia".
- Nel 1641 il padre gesuita Paolo Guldin (1577-1643) sostiene che "una moltitudine di linee, per quanto grande, non potrà mai dar luogo alla più piccola superficie" e si oppone al confronto quantitativo di insiemi di indivisibili. Al metodo di Cavalieri viene riconosciuta un'efficacia euristica, ma non quella nel fondare dimostrazioni valide.
- Nelle *Exercitationes geometricae sex* (1647), Cavalieri ribatte distinguendo tra *infiniti assoluti*, che non si possono confrontare tra loro, e *infiniti relativi*, che invece si possono confrontare. Inoltre, se i principi del metodo sono falsi, perché hanno tanto successo nel ricercare verità geometriche?

L'offensiva dei gesuiti (2)

- Nel 1651 la condanna degli indivisibili viene ribadita nell'*Ordinatio pro studiis superioribus* e nei *Cylindricorum et annularium libri* di André Tacquet (1612-1660). Tacquet riconosce che una linea può essere concepita come generata dal movimento di un punto, ma non si può reificare tale processo dinamico a meno di "far guerra alla geometria". Alla base della critica di Tacquet vi è la strenua difesa della geometria euclidea, vista come modello di organizzazione deduttiva rigorosa e "gerarchica" del sapere matematico.
- La guerra gesuitica contro gli indivisibili si conclude nel 1668 con la soppressione dell'ordine dei gesuati da parte di papa Clemente IX (forse con la *longa manus* dei gesuiti).

John Wallis (1616-1703)

Wallis: l'aritmetica degli infiniti

- Wallis pensa che una figura piana sia costituita da un'infinità di indivisibili ciascuno di altezza uguale a $\frac{1}{\infty}$ dell'altezza totale (tra l'altro, è proprio Wallis a introdurre il simbolo ∞).
- Nell'*Arithmetica infinitorum* (1655), Wallis introduce alcune proprietà aritmetiche di ∞. Ad esempio,

$$\infty \pm 1 = \infty, \frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{\infty} \cdot \infty = 1.$$

- Trova poi:

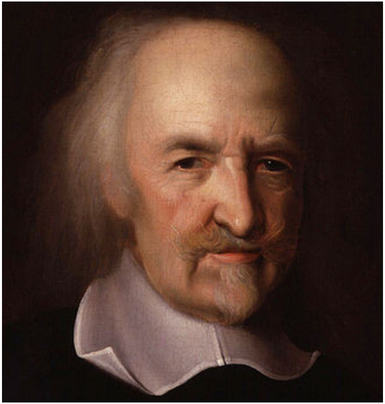
$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times \dots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times \dots}$$

- Curiosamente, è dell'opinione che i numeri negativi siano più grandi dell'infinito. Infatti, considera la successione crescente

$$\dots, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

ove per ogni n si ha $\frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$. Dunque, quando $n = 0$, abbiamo $-1 = \frac{1}{-1} > \frac{1}{0} = \infty$.

Thomas Hobbes (1588-1679)



La controversia Hobbes-Wallis

- Nel *De corpore* (1655), Hobbes nega l'esistenza degli indivisibili, qualificati come "chimere". Wallis aveva sostenuto che una figura piana consta "per così dire" di infinite rette parallele. Hobbes protesta che "per così dire" non è un'espressione da geometra. Vi contrappone una concezione dinamica delle figure piane e solide.
- Nel cap. 20, Hobbes ritiene di aver risolto il problema della quadratura del cerchio. In fase di stampa gli viene però segnalato un errore, che lui ammette, aggiungendo due nuove dimostrazioni (una "quadratura approssimata" e una "problematicamente esatta"), entrambe sbagliate.
- Wallis puntualizza che Hobbes non ha dimostrato niente di quanto afferma:

> *Il suo libro abbonda dappertutto dei più vergognosi paradossi, cosicché a malapena a volte vi si trova qualcosa di ragionevole.*

Gli angoli di contingenza

- Tra il XVI e il XVII sec., si riaccende il dibattito sugli angoli di contingenza, tra chi ne ribadisce il carattere di veri e propri angoli (Cardano, Clavio, Monantholius) e chi invece non li considera tali (Pelletier, Viète, Galileo, Wallis, Bernoulli). Galileo, in particolare, a chi sostiene che gli angoli di contingenza sono divisibili all'infinito considerando circonferenze sempre maggiori che passano per lo stesso punto di contatto, ribatte che a essere diviso non è l'angolo "che non ha quantità", ma lo spazio tra la circonferenza minore e la retta tangente.
- La questione verrà ripresa da Newton, ma con metodi che appartengono già a una fase successiva del dibattito...