I paradossi di Zenone

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2020-21

Zenone di Elea (V sec. a.C.)

Zenone di Elea: la vita

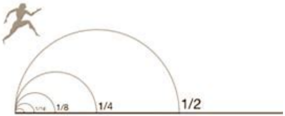
- Vi sono poche notizie certe sulla vita di Zenone. Fu discepolo prediletto di Parmenide; secondo Platone, venne in contatto con Socrate in occasione di una visita ad Atene in compagnia del maestro, effettuata all'età di circa quarant'anni.
- Stando a Diogene Laerzio, tuttavia, Zenone non si sarebbe mai recato ad Atene. Diogene Laerzio racconta che Zenone era figlio di Teleutagora, ma figlio adottivo di Parmenide, e che inoltre era "abile a sostenere entrambi i lati di ogni discorso"; riporta inoltre che venne arrestato e forse ucciso dal tiranno di Elea.
- Secondo Plutarco, Zenone tentò di uccidere il tiranno Demilo e, avendo fallito, per non rivelare l'identità dei suoi complici, "con i suoi stessi denti si strappò la lingua e la sputò in faccia al tiranno".

Zenone di Elea: le fonti e il contesto filosofico

- Le fonti principali del pensiero di Zenone sono il *Parmenide* di Platone, la *Fisica* di Aristotele (e il commentario di Simplicio al medesimo libro), le *Vite dei filosofi* di Diogene Laerzio.
- Zenone intende difendere la tesi del maestro Parmenide circa l'immutabilità dell'Essere e la conseguente contraddittorietà delle nozioni di divenire e di movimento. In particolare, i suoi argomenti possono considerarsi come una delle più antiche applicazioni del metodo di dimostrazione per assurdo: poiché assumere la possibilità del movimento porta a contraddizioni, allora il movimento è impossibile.
- Chi sono i bersagli polemici di Zenone? Per molto tempo si è creduto fossero i pitagorici e la loro dottrina della molteplicità dell'Essere in quanto numero. Adesso si preferisce pensare che Zenone intendesse confutare la nozione di movimento e di divenire propria del senso comune.

La dicotomia

- Elena abita alla casa dello studente di via Trentino e deve recarsi in Facoltà per assistere a una lezione. Supponiamo per comodità che il percorso da fare sia interamente rettilineo. Dimostriamo che Elena non potrà mai arrivare in Facoltà.
- Infatti, per poter giungere a destinazione, deve prima coprire $\frac{1}{2}$ della distanza totale. Ma per arrivare a metà della distanza, dovrà prima percorrere la metà di questa metà, ossia $\frac{1}{4}$ della distanza totale. E prima ancora $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ e così via.
- Il viaggio non potrà dunque neanche iniziare: non c'è una "prima distanza" che Elena può coprire per incominciare. Se vi fosse, infatti, essa potrebbe essere a sua volta dimezzata, e dunque non sarebbe la prima.



Achille e la Tartaruga

- “Piè veloce” Achille sfida la lenta tartaruga a una gara di corsa
- Achille corre dieci volte più velocemente della tartaruga, quindi le dà 10 m di vantaggio
- Quando Achille ha percorso 10 m, la tartaruga è ancora avanti di 1 m
- Quando Achille ha percorso 1 m in più, la tartaruga è ancora avanti di 0.1 m
- ...
- ...quindi Achille non raggiungerà mai la tartaruga!

Commento ai primi due paradossi

Zenone dà un'efficace illustrazione di quelli che oggi vengono chiamati "supercompiti", ossia compiti che consistono in una successione infinita di compiti finiti. Nel nostro caso, in entrambi i paradossi, si tratta di percorrere una successione infinita di distanze, ciascuna delle quali è di per sé finita.

Nel caso di Achille e la tartaruga, ad esempio, sembra che la corsa di Achille possa venire scomposta in una serie di inseguimenti, al termine di ciascuno dei quali Achille non ha ancora raggiunto la sua antagonista. Se l'inseguimento I_n termina all'istante t_n, allora Zenone mostra che non esiste nessun n tale che all'istante t_n Achille ha raggiunto la tartaruga. Quindi, a dispetto delle apparenze, la corsa di Achille non può essere scomposta negli inseguimenti $I_1, I_2, I_3, \ldots$

La freccia

- Supponiamo che un arciere scagli una freccia verso un bersaglio. In ciascun istante del suo tragitto, la freccia è in quiete. Ma può un corpo che è in quiete durante ciascun istante di un certo intervallo di tempo *muoversi* durante lo stesso intervallo di tempo? No, dunque la freccia, a dispetto delle apparenze, non si muove.

Commento al terzo paradosso

- Il paradosso della freccia assume che ogni moto si svolga in un tempo composto di istanti indivisibili *e nient'altro*.
- L'affermazione secondo cui in ciascun istante la freccia è in quiete è giustificata? Se un istante ha durata temporale nulla, la freccia non ha alcun tempo a disposizione per effettuare uno spostamento. Se invece gli istanti hanno una durata, per quanto piccola, il paradosso si blocca. Ma se gli istanti hanno una durata, allora non sono indivisibili, contrariamente all'assunzione. Poiché gli intervalli temporali sono costituiti da istanti e nient'altro, la freccia non si muove.
- Obiezione: dal fatto che la freccia non si muove in un certo istante t è fallace concludere che sia in quiete: perché lo sia bisogna che la freccia non si muova in un qualche intervallo di tempo finito che include t.
- L'obiezione è corretta, ma ha un'implicazione controintuitiva: il moto non accade in un istante, ma solo in intervalli finiti di tempo.

Soluzioni antiche: Diogene

- Pare che Diogene il cinico ritenesse di confutare i paradossi semplicemente mettendosi a camminare (*solvitur ambulando*). Ma non funziona: 1) in un'ottica parmenidea, i sensi ingannano; 2) Zenone ragiona per assurdo: la conclusione del suo argomento (es. "la freccia non si muove") contraddice l'enunciato "la freccia si muove" la cui verità deriva dall'esperienza. Dunque Diogene, paradossalmente, *aiuta* Zenone a concludere la sua prova per assurdo.

Soluzioni antiche: Aristotele

- Aristotele: nella dicotomia, ogni volta che dimezziamo la distanza, dobbiamo dimezzare anche il tempo necessario a percorrerla. Quindi ogni distanza della successione disporrà della frazione appropriata del tempo totale che serve a percorrere la distanza assegnata.
- Aristotele infatti distingue tra un intervallo (spaziale o temporale) *continuo* e lo stesso intervallo dimezzato un numero infinito di volte: il primo è solo in potenza ciò che il secondo è in atto. I due intervalli non differiscono solo geometricamente, ma *fisicamente*. Poiché il tragitto di Elena, la corsa di Achille e il moto della freccia non "presentano discontinuità" (es. Achille non si ferma a $\frac{1}{2}$ o a $\frac{1}{4}$ del percorso), siamo nel primo caso e non c'è nessun paradosso.

La soluzione moderna standard (1)

- Determinare la distanza dalla partenza del punto in cui Achille supererà la tartaruga equivale a trovare il valore della somma infinita (serie)

$$S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \cdots$$

- Se la somma di questo numero infinito di termini è infinita, ha ragione Zenone
- Come si può dimostrare che la serie è convergente anziché divergente?

La soluzione moderna standard (2)

- Moltiplichiamo ambo i membri per 10:

$$10S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} \cdots$$

- Sottraiamo la prima uguaglianza dalla seconda:

$$10S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} \cdot\cdot$$
$$S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \cdots$$

- Otteniamo l'equazione

$$9S = 100$$

- La cui soluzione è 100/9 = 11,11111...

La soluzione moderna standard (3)

- La serie della tartaruga è un esempio di serie geometrica, della forma

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 \dots$$

- È sufficiente, infatti, scegliere a=10, r=1/10
- Se 0 < r < 1, si può trovare il valore della serie moltiplicando S per r e sottraendo Sr da S:

$$\begin{aligned} Sr &= ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 \dots \\ S - Sr &= a \\ S &= \frac{a}{1-r} \end{aligned}$$

Il paradosso è risolto?

- Grünbaum: no. Zenone non mette in questione la struttura matematica dello spazio, ma la natura della realtà *fisica*. Se l'analisi matematica non è una buona descrizione dello spazio e del tempo fisico, la soluzione standard non risolve i suoi paradossi.
- Es. niente garantisce a priori che lo spazio sia continuo o che le sue parti obbediscano all'aritmetica delle serie infinite. La nostra convinzione che la teoria matematica del continuo descrive correttamente lo spazio e il tempo è giustificata nella misura in cui essa viene presupposta dalle leggi della fisica, che sono a loro volta confermate dall'esperienza. Ma si tratta di una giustificazione fallibile...

Russell: la teoria "at-at"

- Secondo Russell, gli argomenti di Zenone si basano su una concezione errata, metafisica, del moto. Per affermare che un oggetto è in movimento in un certo intervallo di tempo, secondo Russell, è sufficiente che esso si trovi in (*at*) una certa posizione all'istante iniziale e in (*at*) un'altra posizione all'istante finale:

  La freccia, in ogni istante del suo volo, è davvero in quiete. L'unico punto dove Zenone ha probabilmente errato è inferire (se lo ha fatto) dall'assenza di cambiamento la conclusione che il mondo si trova nello stesso stato all'inizio e alla fine del volo stesso. Questa conclusione non segue affatto.

- La descrizione matematica del moto è una funzione che appaia punti nello spazio a istanti nel tempo. Muoversi da A a B significa occupare via via i punti associati a ciascun istante. Consiste nel trovarsi in certi punti a determinati istanti, e nient'altro. Non ha alcun senso filosofico chiedersi *come* l'oggetto viene a trovarsi in B partendo da A.

Il discretismo

- Un'altra soluzione consiste nel negare la densità dello spazio e del tempo, assumendo che i segmenti e gli intervalli temporali siano costituiti da unità discrete. In questo modo, il processo di suddivisione infinita presupposto dai paradossi della dicotomia e di Achille e la tartaruga non può aver luogo, e i paradossi vengono bloccati.
- Hermann Weyl: in uno spazio discretizzato non vi è nessuna metrica per cui è vero il teorema di Pitagora, e poiché questo teorema è confermato dagli esperimenti in natura, lo spazio non può essere discreto.
- Alcuni studiosi (McDaniel, van Bendegem) hanno proposto soluzioni all'aporia di Weyl.