La comparsa dell'infinito nella matematica greca

Francesco Paoli

Insegnamento di Filosofia della scienza, 2020-21

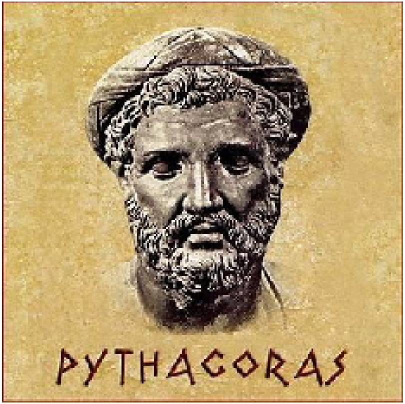
Avvertenze

FRUIZIONE E UTILIZZO DEI MATERIALI DIDATTICI

- E' vietata la **copia**, la **rielaborazione**, la **riproduzione** dei contenuti e immagini presenti nelle lezioni in qualsiasi forma

- E' inoltre vietata la **diffusione**, la **redistribuzione** e la **pubblicazione** dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzati espressamente
dall'autore o da Unica

Pitagora (VI sec. a.C.)



Pitagora: tra storia e leggenda

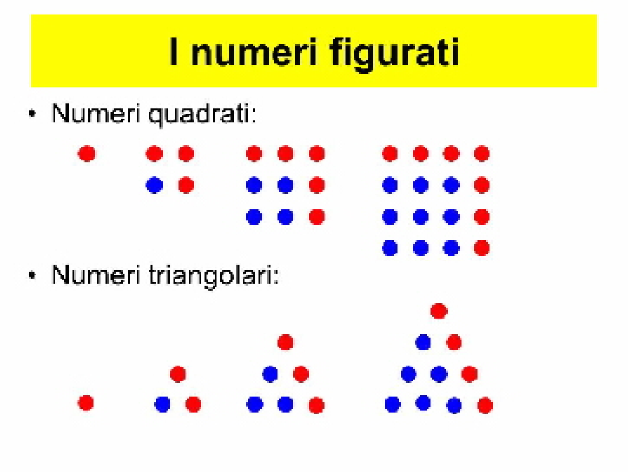
- Nato a Samo, compie viaggi in Egitto e a Babilonia, dove viene a contatto con la matematica e l'astronomia di quelle popolazioni.
- Stabilitosi a Crotone, fonda una società segreta comunitaria, nella quale non solo i possedimenti, ma anche i meriti delle scoperte scientifiche, erano ascritti alla collettività e non al singolo individuo.
- Tra le sue caratteristiche, vi erano la fede nella metempsicosi, rigide prescrizioni dietarie, riti religiosi, la fiducia negli studi matematici e filosofici come base morale dell'esistenza.
- Con Pitagora la matematica compie la sua transizione da scienza applicata, qual era quella praticata dagli egizi e dai mesopotamici, a scienza pura praticata per amore della conoscenza.

Pitagora: la concezione della matematica

- L'universo è fondato su numeri. Quest'idea veniva espressa con un simbolismo mitologico: l'1 è la fonte primaria di tutto l'universo, il 2 e il 3 simboleggiano i principi femminile e maschile, il 4 rappresenta l'armonia dell'universo, ecc.
- Il principale sostegno empirico alla concezione pitagorica veniva dalla *musica*. I pitagorici avevano notato importanti connessioni tra i suoni armonici e semplici rapporti numerici. Ad esempio, se una corda di lunghezza L produce una certa nota, allora una corda di lunghezza $\frac{L}{2}$ produce una nota in armonia con la prima; lo stesso vale per corde di lunghezza pari a $\frac{2}{3}L$ o $\frac{3}{4}L$.
- Generalizzando quest'idea, la scuola di Pitagora arriva all'idea che l'universo è fondato su relazioni numeriche basate su rapporti di numeri interi; in altre parole, su *frazioni* o *numeri razionali*.

Pitagora: le successioni infinite di numeri

Numeri triangolari e quadrati; gnomone dispari e numeri quadrati



Pitagora: la scoperta degli irrazionali (1)

Theorem

$\sqrt{2}$ *non è un numero razionale.*

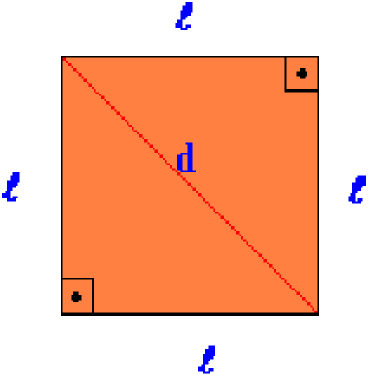
Proof.

Supponiamo per assurdo che lo sia. Allora esistono numeri naturali m e n tali che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Possiamo supporre senza perdita di generalità che la frazione $\frac{m}{n}$ sia irriducibile. Dalla nostra ipotesi segue che

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2, \text{ ossia } 2 = \frac{m^2}{n^2}.$$

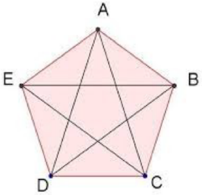
Ma ciò equivale a $2n^2 = m^2$. Allora m^2 è *pari*, e dunque lo è anche m. Quindi esiste un t tale che $m = 2t$. Andando a sostituire nell'uguaglianza precedente, $2n^2 = m^2 = (2t)^2 = 4t^2$. Semplificando, $n^2 = 2t^2$. Allora, n^2 è *pari*, e dunque lo è anche n. Abbiamo dimostrato che m ed n sono entrambi pari, ma ciò contraddice l'assunzione che la frazione $\frac{m}{n}$ fosse irriducibile. $\square$

Pitagora: la scoperta degli irrazionali (2)



Pitagora: l'infinito nella geometria

Il pentagono stellato:



Prendiamo due diagonali a caso che non hanno un vertice in comune, ad esempio AD e EB. Il loro punto di intersezione (chiamiamolo F) suddivide AD in *media ed estrema ragione*, ossia $AD : DF = DF : AF$. Il rapporto $\frac{AD}{DF} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ si chiama rapporto aureo, ed è ubiquo in natura e nell'arte; ha straordinarie ed affascinanti proprietà matematiche.

Euclide (IV-III sec. a.C.)

Gli *Elementi* di Euclide: il metodo

In quest'opera, che sistematizza le conoscenze geometriche (e non solo) dell'epoca, Euclide dà un limpido esempio del metodo assiomatico antico.

- Si identificano dei concetti primitivi la cui intelligibilità è garantita dall'*evidenza*.
- Si identificano delle proposizioni primitive (assiomi e postulati) la cui verità è garantita dall'*evidenza*.
- Gli altri concetti geometrici sono definite a partire dai concetti primitivi mediante le *definizioni*, che trasferiscono l'evidenza dai secondi ai primi.
- Le altre verità geometriche sono definite a partire dalle proposizioni primitive mediante le *dimostrazioni*, che trasferiscono l'evidenza dalle seconde alle prime.

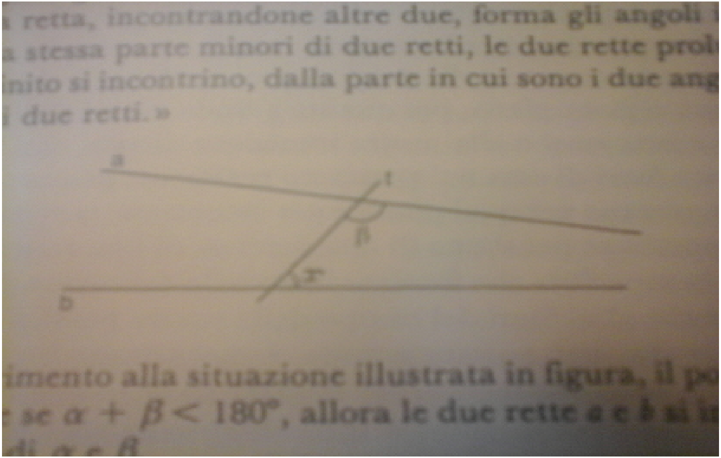
Gli *Elementi* di Euclide: assiomi e postulati

Assiomi (o *nozioni comuni*): proposizioni primitive che si ritengono evidentemente vere in generale, indipendentemente dal dominio di appicazione (es. "Il tutto è maggiore della parte").
Postulati: proposizioni primitive la cui verità è assunta come evidente, ma la cui validità è limitato al campo specifico della scienza che li assume.

Gli *Elementi* di Euclide: i cinque postulati

1. Da ogni punto si può condurre una retta a ogni altro punto;
2. Ogni segmento si può prolungare indefinitamente;
3. Dato un punto e un segmento, si può costruire una circonferenza che ha quel punto come centro e quel segmento come raggio;
4. Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro;
5. Se due rette tagliate da una trasversale formano, dalla stessa parte, angoli coniugati interni la cui somma è minore di due retti, esse si incontrano da quella parte.

Gli *Elementi* di Euclide: il quinto postulato


retta, incontrandone altre due, forma gli angoli
stessa parte minori di due retti, le due rette prol
inito si incontrino, dalla parte in cui sono i due ang
due retti. »

imento alla situazione illustrata in figura, il po
se $\alpha + \beta < 180°$, allora le due rette a e b si in

Gli *Elementi* di Euclide: il quinto postulato

- Il quinto postulato è equivalente alla seguente proposizione: Dati una retta e un punto fuori di essa, per quel punto può essere condotta una e una sola parallela alla retta data.
- Euclide non è probabilmente soddisfatto della sua "evidenza", tanto è vero che lo usa una volta sola in tutti gli *Elementi* (Prop. 29, libro I).
- In una regione piana, grande a piacere ma comunque accessibile all'intuizione diretta, dati una retta e un punto fuori di essa, possiamo far passare per quel punto *infinite* rette che non incontrano la retta data; affermare che tutte quelle rette *meno una* incontrano la retta data è un'impegnativa estrapolazione che ci porta oltre i dati dell'osservazione e dell'intuizione.

Critiche antiche al quinto postulato

Posidonio (I sec. a.C.): cambia la definizione di parallelismo. Due rette sono parallele se sono complanari e equidistanti. *Problema*: va dimostrato che il luogo dei punti equidistanti da una retta e giacenti da una parte di essa è una retta (la dimostrazione richiede il quinto postulato).
Tolomeo (II sec. d.C.): dimostra il quinto postulato a partire dalla proposizione che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti. *Problema*: questa proposizione va assunta come nuovo assioma, e non è più evidente del quinto postulato.
Proclo (V sec. d.C.): dimostra il quinto postulato a partire dalla proposizione che la distanza fra due punti presi su rette intersecantesi può essere resa grande a piacere prolungando sufficientemente le due rette. *Problema*: questa proposizione va assunta come nuovo assioma, e non è più evidente del quinto postulato.

Euclide: le grandezze incommensurabili

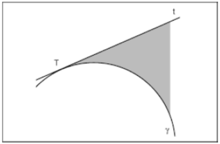
- Per caratterizzare le grandezze incommensurabili, Euclide ricorre al metodo dell'*anthyphairesis*, attribuibile a Teeteto (cfr. l'algoritmo per trovare il MCD di due numeri interi).
- Siano dati segmenti di lunghezza a e b, rispettivamente, con $a > b$. Si vuole trovare una *misura (logos) comune* ad a e b.
- Si sottragga ripetutamente b da a, sinché non si ottiene un resto $r < b$. Se $r = 0$, allora b è la misura comune cercata. Se $r > 0$, si sottrae ripetutamente r da b sino a che non si ottiene un resto $s < r$. E così via...
- Questo procedimento si arresta dopo un numero finito di passi? Non è detto: può continuare indefinitamente. I numeri decrescono sino a diventare minori di ogni grandezza prefissata. I segmenti dati non hanno una misura comune, sono incommensurabili.

Euclide: le grandezze infinitesime (1)

- Il rapporto tra due grandezze può essere ben definito anche quando queste sono incommensurabili (es. lato e diagonale di un quadrato). In generale, quando è che il rapporto tra due grandezze è ben definito?
- Euclide: "sono dette avere rapporto tra loro grandezze che possono, se moltiplicate, superarsi tra loro". In termini moderni: le grandezze A e B ($A < B$) hanno un rapporto se esiste un multiplo mA di A tale che $mA > B$. Tale è sempre il caso, secondo Euclide, quando considero grandezze omogenee, ad es. due angoli o due segmenti.
- Euclide non fa altro che enunciare il cosiddetto postulato di *Eudosso-Archimede*, in realtà già noto ad Aristotele. Questo postulato esclude la possibilità di grandezze infinitesime. Tuttavia, altri passi degli *Elementi* sembrano implicitamente ammettere tali grandezze.

Euclide: le grandezze infinitesime (2)

- Considera infatti (nel Libro III) i cosiddetti *angoli curvilinei*, formati da un lato retto e uno curvo, come *l'angolo di contingenza* tra una circonferenza e una sua tangente. Dimostra che un angolo di contingenza è minore di un qualsiasi angolo rettilineo; quindi gli angoli di contingenza violano il postulato di Eudosso-Archimede.

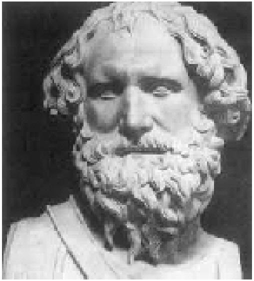


- Proclo: un angolo di contingenza sembrerebbe essere una grandezza, perché può essere diviso da una linea. Ma se lo fosse, il rapporto tra esso e un angolo rettilineo sarebbe ben definito. Ma Euclide ha dimostrato che questo è impossibile. Quindi essi non sono grandezze omogenee agli angoli rettilinei.

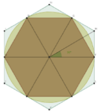
Antifonte: la quadratura del cerchio

- Uno dei problemi matematici più discussi nell'antichità è quello di costruire con riga e compasso un quadrato di area uguale a quella di un cerchio assegnato (*quadratura del cerchio*).
- Antifonte (V sec. a.C.): si inscriva in un cerchio un quadrato di lato l. Poi si inscriva nel medesimo cerchio un ottagono regolare di lato $\frac{l}{2}$. Si prosegua così, raddoppiando ogni volta il numero dei lati e dimezzandone la lunghezza. Simplicio: "Così continuando, credeva che finalmente fosse esaurita la superficie".
- Simplicio osserva però (attribuendo la critica ad Alessandro di Afrodisia) che una circonferenza può avere al più due punti in comune con una retta e quindi i lati del poligono, per quanto piccoli, non potranno mai coincidere con i corrispondenti archi.

Archimede (III sec. a.C.)



- Applicando il *metodo di esaustione*, dovuto a Eudosso di Cnido (IV sec. a.C.) e ripetutamente applicato da Euclide negli *Elementi*, Archimede rende rigorosa l'intuizione di Antifonte e calcola una buona approssimazione di π.
- Archimede considera un cerchio e una coppia di esagoni regolari, uno inscritto in esso e uno circoscritto ad esso.



- Poi considera poligoni regolari aventi un numero ogni volta doppio di lati, sino ad ottenere una successione di poligoni inscritti e una di poligoni circoscritti al cerchio, che lo "approssimano" una dall'interno e una dall'esterno.
- Iterando il procedimento 16 volte, dimostra che $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$.

Archimede: le miriadi

- Archimede (*Arenario*):

> *Alcuni pensano, o re Gelone, che il numero di granelli di sabbia, non solo della spiaggia intorno a Siracusa, ma in tutta la Sicilia e in ogni regione della Terra, abitata o no, sia infinito.*

- Osserva anche che secondo altri tale numero è finito, ma non se ne può nominare uno più grande.
- Probabilmente l'equivoco è determinato dal sistema di notazione numerica greco, che consente di notare numeri sino a una miriade di miliardi (10^8). Ma Archimede dice: chiamiamo *primi* i numeri compresi tra 1 e una miriade di miliardi. Assumiamo adesso questa come nuova unità di misura, e chiamiamo *secondi* i suoi multipli.
- Questo procedimento può essere iterato indefinitamente (per la cronaca, secondo Archimede il numero dei granelli di sabbia contenuti in un volume pari all'intero cosmo è pari a circa 10^{63}).